Cuadernos Metodológicos

34

Teoría de juegos

2ª edición ampliada
y revisada

Ignacio Sánchez-Cuenca

CIS
Centro de Investigaciones Sociológicas

Las normas editoriales y las instrucciones para los autores puden consultarse en:
http://www.cis.es/publicaciones/CM/

COLECCIÓN «CUADERNOS METODOLÓGICOS», NÚM. 34

Primera edición, junio de 2004
Segunda edición, diciembre de 2009

Impreso y hecho en España
Printed and made in Spain

NIPO: 004-09-011-8
ISBN: 978-84-7476-482-6
Depósito legal: M. 50.174-2009

Fotocomposición e impresión: EFCA, S.A.
Parque Industrial «Las Monjas».
28850 Torrejón de Ardoz (Madrid)





El papel utilizado para la impresión de este libro es 100% reciclado y totalmente libre de cloro.

Índice

Introducción

El propósito de este libro de la serie *Cuadernos Metodológicos* quedará cumplido si el lector se forma una idea general sobre los instrumentos que la teoría de juegos ofrece para analizar situaciones estratégicas y aprende a dar los primeros pasos en la elaboración y solución de modelos formales. Por tanto, el objetivo es doble: que el lector consiga entender la parte técnica de la teoría de juegos, y de este modo pueda discutir críticamente y con fundamento sus ventajas y limitaciones; y, además, que sepa comenzar a aplicarla para dar respuesta a sus preguntas de investigación. Al dar importancia sobre todo al aspecto práctico de la teoría de juegos, ha sido necesario dejar fuera algunas cuestiones, como la revisión de sus aplicaciones en las ciencias sociales, o la exposición de los debates sobre las bases conceptuales de la teoría.

Aunque libros sobre teoría de juegos hay muchos, la mayoría se orienta hacia los economistas. Esto suele traducirse en un nivel elevado de formalización matemática y en ejemplos que casi siempre tienen que ver con el comportamiento de las empresas. En lengua inglesa, pero no en española, hay introducciones a la teoría de juegos más específicas, como la de Morrow (1994) para ciencia política, la de Baird, Gertner y Picker (1994) para el derecho, o incluso introducciones escritas a la vez para economistas y politólogos (Dutta 1999). Mención aparte merece el reciente libro de McCarty y Meirowitz (2007), un manual extremadamente riguroso (y más avanzado que el presente) escrito expresamente desde la ciencia política con multitud de ejemplos y aplicaciones propios de esa disciplina. En español no hay una presentación de la teoría de juegos para científicos sociales. A pesar de que este libro no aspira a cubrir todo el terreno, sí puede servir como primera toma de contacto. Se ha procurado reducir la parte matemática a su mínima expresión y apenas se da algo por sabido. Los ejemplos e ilustraciones que aparecen pertenecen al ámbito de la ciencia política o la sociología.

La teoría de juegos constituye el material analítico más importante que se emplea en la teoría de la elección racional. La teoría de la elección racional, a pesar de su nombre, no es en realidad una "teoría": de hecho, no contiene hipótesis que sean directamente verificables. Se trata más bien de un enfoque o de una aproximación a la realidad social. En su seno tienen lugar múltiples desarrollos, como la teoría de la acción colectiva, los modelos

espaciales de competición política, la teoría de la elección social o los modelos de economía política, todos ellos inspirados en el principio de que el factor más importante en la explicación de la acción humana es la persecución racional del auto-interés. Casi todos estos desarrollos recurren, en mayor o menor medida, a los instrumentos de análisis que propone la teoría de juegos.

Para precisar cuál es el ámbito de aplicación de la teoría de juegos, conviene realizar algunas distinciones. Desde el punto de vista más general, cabe identificar dos grandes tipos de acción: la acción que se produce en *contextos paramétricos* y la que se produce en *contextos estratégicos*. En contextos paramétricos, el agente conoce todos los parámetros que afectan a su decisión. Por ejemplo, cuando un consumidor acude al mercado a comprar algún bien, los parámetros relevantes son los precios de los bienes y la restricción presupuestaria del consumidor. En este caso, la decisión, además de ser paramétrica, se lleva a cabo con *certidumbre*: el agente conoce los valores de todos los parámetros (sabe cuánto cuestan los bienes y de cuánto dinero dispone para gastarse en esos bienes). En cambio, si un agente decide comprar un billete de lotería, su decisión, aun siendo paramétrica, es una decisión que se toma bajo *riesgo*, pues el agente no puede saber de antemano si el billete adquirido va a resultar premiado o no, aunque puede saber la probabilidad de recibir el premio (si se sortean 100.000 números, la probabilidad de ganar es 1/100.000). Si el agente ni siquiera conoce esa probabilidad, decimos entonces que su decisión se lleva a cabo bajo *incertidumbre*. Por ejemplo, si el agente invierte en bolsa, no sabe de antemano qué probabilidad tiene de ganar o perder. Puede tener estimaciones personales o subjetivas de cómo va a evolucionar la bolsa, pero no se trata de una probabilidad objetiva como la del caso de la lotería.

En las situaciones estratégicas, los resultados de la acción o elección del agente no dependen sólo de parámetros. Además de los parámetros, el resultado de la acción depende de lo que otras personas hagan. Decimos que hay interacción estratégica entre varios agentes cuando la acción de cada uno depende de las expectativas que cada uno tenga sobre lo que vayan a hacer los demás. Supongamos una situación estratégica entre dos agentes, *A* y *B*. Lo que haga *A* depende de lo que crea que *B* vaya a hacer, pero a su vez lo que *B* haga depende de lo que *B* crea que *A* vaya a hacer. Pensemos en el juego de "piedra, papel o tijeras". *A* sacará tijeras si piensa que *B* que va a sacar papel, pero *B* sacará piedra si piensa que *A* va a sacar tijeras; ahora bien, si *A* sabe que eso es lo que *B* piensa, debería sacar en realidad papel, en cuyo caso *B* debería sacar tijeras, y así sucesivamente. En este ejemplo, podría parecer que el encadenamiento de las expectativas origina una especie de círculo vicioso o un regreso al infinito que impide al agente tomar una decisión. Por fortuna, la teoría de juegos demuestra que esto no es así, y que las situaciones estratégicas tienen soluciones racionales. En el caso del juego "piedra, papel o tijeras", la teoría recomendaría a

cada jugador, por razones que se exponen en el capítulo 2, que tomara su decisión al azar, eligiendo con igual probabilidad cada una de las opciones posibles.

Mientras que la teoría de juegos se ocupa de las situaciones estratégicas, la teoría de la decisión (o teoría de la utilidad) estudia las situaciones paramétricas. Este reparto del trabajo no implica sin embargo que se trate de teorías independientes. Como se expone en el capítulo 1, la teoría de juegos se construye sobre los fundamentos que proporciona la teoría de la decisión.

Las situaciones estratégicas se dan en multitud de ámbitos. Hay dependencia estratégica cuando dos empresas en un duopolio tienen que fijar su nivel de producción, cuando dos jugadores de ajedrez se enfrentan en una partida, cuando un sindicato negocia con una empresa, cuando los partidos políticos compiten en unas elecciones, cuando los ejércitos luchan en una batalla, cuando diversos grupos étnicos tienen que organizar la convivencia en un mismo territorio, cuando en un Parlamento los representantes establecen coaliciones para formar un Gobierno, cuando una organización terrorista presiona a un Estado, cuando se celebra una subasta, etcétera.

La teoría de juegos comenzó analizando juegos de cartas como el póker. El término "juego" se conservó incluso después de que la teoría abandonara el estudio de los auténticos juegos y pasase a considerar situaciones estratégicas en general. Un juego, en este sentido, es cualquier situación estratégica. El primer trabajo importante en este campo fue *Theory of Games and Economic Behavior*, publicado en 1944. Los autores, John von Neumann, un físico y matemático, y Oskar Morgenstern, un economista, proponían, entre otras cosas, una nueva teoría de la utilidad (cuyas líneas generales se exponen en el capítulo 1) y una solución algorítmica para los juegos de suma cero, juegos en que uno gana lo que el otro pierde. Demostraron que estos juegos, aunque poco frecuentes en la realidad, tienen una solución sencilla y elegante desde el punto de vista matemático.

Las aportaciones principales se producen con la publicación de varios trabajos sobre teoría de juegos a cargo del matemático John Nash (1996) en los años 1950-1953. Nash propuso una noción general y simple de equilibrio (el llamado *equilibrio de Nash*, que se estudia en el capítulo 2), entendiendo por equilibrio una situación en la que ninguno de los jugadores tiene incentivos para cambiar su elección. Esta noción se aplica por igual a juegos de suma cero, en los que la divergencia de intereses es total, y a los juegos de suma distinta de cero, en los que tal divergencia es parcial. En un equilibrio de Nash, los jugadores actúan racionalmente (intentan maximizar su utilidad), y no pueden llegar a acuerdos entre sí que no se sostengan sobre los propios intereses de los jugadores. Cuando sucede que no hay posibilidad de establecer acuerdos cuyo cumplimiento sea garantizado por una tercera parte, se habla de juegos no cooperativos. En este libro se examinan los juegos no cooperativos, dejando fuera los juegos cooperativos.

Las aplicaciones y desarrollos de la teoría de juegos tardaron tiempo en hacerse notar [1]. Hasta bien entrados los años sesenta del pasado siglo no se realizaron avances teóricos de importancia. John Harsanyi propuso entonces su teoría de los juegos de información incompleta (véase el capítulo 5) y Richard Selten, en los setenta, ofreció nuevas nociones más refinadas de equilibrio, teniendo en cuenta los problemas de credibilidad de las promesas y amenazas que pueden intervenir en los juegos (véase el capítulo 3). Harsanyi y Selten colaboraron además en un ambicioso proyecto destinado a proponer una teoría del equilibrio válido para cualquier tipo de juego que culminó con la publicación del libro *A General Theory of Equilibrium Selection in Games* en 1988. Estos tres autores, Nash, Harsanyi y Selten, recibieron el premio Nobel de Economía en 1994 por sus contribuciones decisivas a la teoría de juegos. Durante los años ochenta se avanzó en lo que se conoce como refinamientos del equilibrio de Nash, estableciendo por ejemplo los primeros modelos de negociación basados en teoría de juegos no cooperativos (véanse los capítulos 4 y 5). En los últimos veinte años, los avances más relevantes desde el punto de vista teórico han sido dos. Por un lado, el desarrollo de los modelos evolutivos, inspirados en el trabajo pionero de John Maynard Smith (1982), en los que no se supone racionalidad a los agentes [2]. El mecanismo de la selección natural, sin embargo, produce resultados equivalentes. Sus aplicaciones no se limitan sólo a la biología: pueden encontrarse también en economía, psicología, e incluso filosofía moral. Tienen la ventaja de que pueden explicar fenómenos muy generales, desde una perspectiva macro, sin necesidad de realizar supuestos exigentes sobre la racionalidad de los agentes. Por otro lado, ha sido fundamental también la aparición de lo que suele llamarse economía del comportamiento *(behavioral economics)* [3]. Esta teoría, motivada sobre todo por los resultados de múltiples experimentos de laboratorio, intenta adaptar el instrumental de la teoría de juegos a la clase de comportamientos que los seres humanos llevan a cabo en la realidad y que se desvía, en ocasiones de forma muy pronunciada, de lo que postulan los modelos más abstractos de teorías de juegos.

La teoría de juegos fue penetrando lentamente en la teoría económica, hasta el punto de que hoy muchos manuales de microeconomía se exponen en términos de esta teoría. La teoría de juegos, por ejemplo, ha resultado extremadamente útil en economía para entender todos aquellos intercambios entre agentes en los que hay información asimétrica: una de las partes sabe más que la otra, tiene información que los demás no conocen.

En ciencias sociales, es en ciencia política donde la teoría de juegos ha sido especialmente importante (Riker 1992). En la medida en que la ciencia

---

[1] El lector interesado en la historia de la teoría de juegos, puede consultar Wientraub (1992) y Kuhn (1997).

[2] Un manual introductorio a la teoría de juegos desde esta perspectiva es Gintis (2000).

[3] Un panorama general puede encontrarse en Camerer (2003).

política estudia situaciones estratégicas (negociaciones entre Estados, competición entre partidos, relaciones entre grupos de interés y gobiernos, conflictos entre instituciones, etc.), la teoría de juegos encuentra un terreno fértil. El uso de modelos de teoría de juegos es habitual en las principales revistas de ciencia política. Resulta frecuente encontrar modelos formales en las páginas de *American Political Science Review*, *American Journal of Political Science*, *European Journal of Political Research*, *Journal of Theoretical Politics*, *Rationality & Society* e incluso en revistas más tradicionales como *World Politics* o *International Organization*. La teoría de juegos ha pasado a ser una herramienta casi tan importante como las técnicas estadísticas de análisis de datos.

La sociología, aunque en menor medida que la ciencia política, también muestra un interés creciente por la teoría de juegos. Así, desde los modelos matemáticos de Coleman (1990) hasta la apuesta fuerte de Goldthorpe (2000: caps. 5-6) por la elección racional, pasando por los trabajos de lo que se llamó "marxismo analítico" (Roemer 1986) o por los estudios de acción colectiva y movimientos sociales (Marwell y Oliver 1993, Heckathorn 1996) hay trabajos abundantes en los que, de manera programática o aplicada, se usa el instrumental de la teoría de juegos.

No obstante esta difusión rápida y amplia, la teoría de la elección racional, y con ella la teoría de juegos, ha sido objeto de una intensa discusión metodológica en ciencia política y también en sociología, sobre todo a partir de la publicación en 1994 del libro de Donald Green e Ian Shapiro, *Pathologies of Rational Choice*. Se ha acusado a esta teoría de estar más preocupada por la elegancia formal de los modelos que por su relevancia empírica. Se ha objetado también que, cuando la teoría se interesa por la realidad, suele ser inmune a los fracasos, pues siempre cabe hacer modificaciones *ad hoc* de los modelos hasta que éstos se ajusten a los hechos. A juicio de sus críticos, la teoría de la elección racional está lastrada por sus planteamientos universalistas (aplicación irrestricta del supuesto de racionalidad) y por una ambición excesiva. La resistencia a la teoría está incluso relativamente organizada. Un movimiento de académicos, agrupados bajo el nombre de *Perestroika*, ha protestado, llegando hasta las páginas de *New York Times*, por la hegemonía intelectual y la influencia institucional que ha adquirido la teoría en la ciencia política (Monroe 2005).

No se entra aquí en esa discusión, pues nos alejaría del objetivo principal, la exposición de la propia teoría. Con todo, no está de más hacer algunas observaciones generales y breves sobre las ventajas e inconvenientes que plantea el uso de la teoría de juegos en las ciencias sociales. La teoría de juegos parte del supuesto común a toda la teoría económica de que los agentes actúan en función de sus preferencias, es decir, que tratan de maximizar su utilidad. El valor añadido de la teoría de juegos radica en que especifica en qué consiste actuar en función de preferencias en situaciones estratégicas. Establece qué estrategias son racionales dado que cada agente sabe que

todos los demás están también tratando de maximizar su utilidad. Así, se dice que una combinación de estrategias constituye un equilibrio cuando ninguno de los agentes puede aumentar unilateralmente su utilidad cambiando de estrategia. La teoría de juegos calcula en cada juego qué cuenta como equilibrio.

Gracias al concepto de equilibrio, economistas, politólogos y sociólogos pueden elaborar modelos formales de situaciones estratégicas[4]. Para la construcción del modelo es necesario tomar decisiones sobre qué es esencial y qué es accidental o accesorio en la descripción de la situación que se quiere analizar. En primer lugar, hay que identificar cuáles son los actores relevantes. En segundo lugar, hay que especificar qué preferencias tienen los actores. No siempre es fácil hacerlo, pues es preciso contar con alguna razón poderosa para atribuir unas preferencias y no otras. En caso contrario, cabe sospechar que se eligieron unas preferencias determinadas para conseguir derivar un equilibrio que coincida con la realidad, en cuyo caso el modelo no tiene valor explicativo alguno. En tercer lugar, hay que especificar también de qué tipo de información disponen los actores. En cuarto lugar, hay que aclarar qué estrategias o qué acciones pueden llevar a cabo los actores. Una vez identificados los actores, sus preferencias, su información y sus estrategias, se procede a "resolver" el modelo, es decir, se calcula qué combinaciones de estrategias pueden ser equilibrios cuando los actores son racionales.

Los equilibrios sirven de base para la derivación de consecuencias empíricas del modelo. Se puede comprobar si los resultados de la realidad coinciden en mayor o menor medida con el modelo. Si no coinciden, siempre cabe la posibilidad de arreglarlo modificando alguno de los supuestos iniciales sobre el número de jugadores, sus preferencias o su información. Para garantizar que el modelo pueda ser puesto a prueba con algo más de rigor, no se debe comparar una situación concreta con el equilibrio predicho por el modelo, sino más bien establecer conclusiones sobre cómo el equilibrio se modifica cuando cambian los valores de las variables independientes que según el modelo tienen peso explicativo. De esta forma, el investigador puede elegir varios casos empíricos, cada uno con valores diferentes en las variables independientes, y explicar las variaciones encontradas en la variable dependiente a partir de los cambios en el equilibrio que se producen cuando varían las variables independientes.

Un ejemplo que ilustra este procedimiento puede ser el de los modelos de democratización desarrollados por Daron Acemoglu y James A. Robinson en su celebrado libro *Economic Origins of Dictatorship and Democracy* (2006). Los autores han elaborado un conjunto de modelos de teoría de juegos para explicar por qué algunos países se transforman en democracias estables, otros permanecen como regímenes dictatoriales y finalmente algunos transitan

[4] Un libro interesante sobre los problemas de elaboración y uso de modelos formales en las ciencias sociales es Morton (1999).

de forma inestable entre la democracia y la dictadura. A su juicio, la democracia es una solución institucional que aceptan a regañadientes los ricos para evitar una revolución de los pobres que acabe con su riqueza. Las reglas democráticas garantizan a los pobres cierto nivel de redistribución económica, previniéndose de este modo cualquier intento revolucionario. El análisis de las condiciones en las que la democracia es un equilibrio (un sistema político en el que ningún grupo con poder para ello intenta cambiar) permite formular hipótesis empíricamente verificables y a las que habría sido difícil llegar de no ser por el modelo. Por ejemplo, los autores demuestran que, dados los supuestos de partida, la democracia es más probable que arraigue en países en los que hay un grado intermedio de desigualdad económica. En regímenes con mucha igualdad el problema redistributivo es menor y por tanto puede que no llegue a surgir una demanda de democracia; mientras que en regímenes muy desiguales los ricos tienen tanto que perder que prefieren reprimir y mantener un régimen dictatorial antes que dar paso a una democracia que podría resultar demasiado costosa en términos económicos.

Los modelos de teoría de juegos son especialmente útiles en las ciencias sociales cuando consiguen proporcionar hipótesis de trabajo a las que no se podría haber llegado sin la mediación del modelo. Con todo, los modelos pueden tener otros usos que van más allá de su aplicación empírica inmediata. Con frecuencia, sirven para introducir claridad y precisión en cuestiones que empíricamente son muy complejas. Así, el modelo ideal de competición bipartidista establece que en equilibrio los partidos presentan programas electorales idénticos. Sin duda, no se trata de una predicción demasiado realista. Sin embargo, el modelo es importante, pues configura un punto de referencia básico a partir del cual se pueden ir introduciendo variables nuevas (incertidumbre, distintos tipos de preferencias de los partidos) que contribuyan a aproximarnos mejor a la realidad.

Al emplear modelos de teoría de juegos, el científico social se compromete a ser transparente en los supuestos que realiza. De la misma manera, el modelo garantiza que haya una conexión lógica entre dichos supuestos y las hipótesis últimas que se deriven del equilibrio encontrado. Se gana por tanto en rigor y claridad. Como contrapartida, los modelos obligan a dejar de lado información empírica detallada que puede ser de gran interés pero que, según la teoría, no es necesaria para entender el asunto que se esté analizando. Desde un punto de vista instrumental, cabe decir que los modelos de teoría de juegos son una herramienta para el científico social: no hay razón para usarlos siempre, pero tampoco para rechazarlos por principio.

Este libro se divide en cinco capítulos. El primero es una introducción a la teoría de la utilidad. El segundo aborda los juegos en forma normal. El tercero se adentra en los juegos en forma extensiva. El cuarto estudia los juegos repetidos a lo largo del tiempo. El quinto analiza los juegos de información incompleta. En cada capítulo se incluye una sección en la que se aplica

el instrumental teórico correspondiente a algún problema específico de ciencia política o sociología. Para ello, se resumen y simplifican modelos que han aparecido en la literatura y que se ajustan bien a las necesidades de un libro introductorio como éste. Así, en el primer capítulo se expone un modelo sobre la decisión de los partidos políticos de moderarse ideológicamente para ganar las elecciones (Sánchez-Cuenca 2004); en el segundo, se presenta un modelo sobre reformas administrativas en Latinoamérica (Geddes 1992); en el tercero, se analiza, por un lado, el conflicto étnico en la guerra civil yugoeslava (Fearon 1998) y, por otro, la política monetaria y la independencia de los bancos centrales (Barro y Gordon 1983); en el cuarto se aborda un modelo sobre la formación de ideologías políticas a partir de coaliciones de intereses (Bawn 1999); y en el quinto se analiza un modelo sobre democracia y redistribución de la riqueza (Boix 2003). Estas aplicaciones ayudan a clarificar los conceptos de la teoría de juegos e ilustran cómo esta teoría se puede utilizar en las ciencias sociales para entender mejor la realidad.

Nota sobre la segunda edición: Esta segunda edición mejora y amplía notablemente la original de 2004. Ante todo, se han corregido diversos errores de la versión anterior. Además, en esta ocasión el Comité Editorial de la serie *Cuadernos Metodológicos* del CIS ha tenido a bien dejar un mayor margen de discrecionalidad en la selección de los modelos aplicados, lo que me ha permitido cambiar varios de los modelos que se presentaban en la primera edición y añadir algunos nuevos. Confío en que, de esta manera, haya un mejor ajuste entre los contenidos teóricos y aplicados del libro. Por último, he modificado en gran medida la exposición del capítulo 1 sobre teoría de la utilidad, añadiendo un análisis más sistemático sobre la idea de racionalidad, el principio de utilidad esperada y las actitudes hacia el riesgo. Quisiera aprovechar esta nota para agradecer a los estudiantes del Centro de Estudios Avanzados en Ciencias Sociales del Instituto Juan March que pasaron por mi curso sobre teoría de juegos y modelos formales en ciencia política. Este libro lo he escrito a partir de los materiales que durante siete años utilicé en la preparación de aquel curso.

1
El principio de racionalidad y la teoría de la utilidad

El principio de racionalidad

La teoría de la elección racional, como ya se ha mencionado en la introducción, parte del supuesto de que los agentes son racionales. Conviene explicar qué quiere decir exactamente que los agentes sean racionales. Primero se presenta una definición genérica, que vale para todas las situaciones posibles y luego se analiza cómo dicha definición genérica se desarrolla de modo distinto en función del tipo de problema con el que se enfrente el agente. Hay versiones más exigentes que otras con respecto a los contenidos de la racionalidad. Que una versión de la racionalidad sea más exigente que otra significa que parte de supuestos más restrictivos sobre la forma en la que el agente toma sus decisiones. Cuanto más exigente sea la definición de racionalidad que se maneja, menos realista resulta.

La premisa de la que parte el supuesto de racionalidad es muy sencilla: los agentes (ya sean actores individuales, es decir, personas, o colectivos, como Estados, partidos políticos, sindicatos, clases sociales) tienen deseos sobre cómo les gustaría que fuera el mundo y creencias acerca de cómo funciona el mundo. En la terminología propia de la teoría económica y la teoría de la elección racional, a esos deseos se les llama *preferencias*. Una vez que el agente tiene unas preferencias, el principio de racionalidad establece que el agente actuará en función de las mismas. Que el agente elija a partir de sus preferencias sólo significa que el agente actúa buscando lo mejor frente a lo peor. Este supuesto se conoce también como el supuesto de comportamiento auto-interesado. El agente actúa en función de sus preferencias y no en función de las preferencias de los demás.

Comportamiento auto-interesado no implica necesariamente comportamiento egoísta. El agente puede ser egoísta, en el sentido de que sólo se preocupe por su propio bienestar, pero puede ser también altruista o envidioso, en el sentido de que además de su propio bienestar le preocupe también el

bienestar de los demás. Si el agente tiene preferencias acerca del bienestar de los demás, sigue siendo auto-interesado, pues actúa todavía en función de sus preferencias. El altruista se alegra de que los demás mejoren su condición, mientras que el envidioso se lamenta.

A pesar de que el principio del comportamiento auto-interesado sirva para un espectro tan amplio de motivaciones, lo cierto es que en la literatura casi siempre se parte de comportamiento egoísta (Sánchez-Cuenca 2008). El supuesto del egoísmo suele introducirse no porque el investigador piense que los agentes son verdaderamente egoístas, sino más bien por razones metodológicas, ya sea porque se crea que de otra manera la teoría no es verificable empíricamente, ya sea porque se tema que la teoría se vuelva tautológica, vacía de contenido. En cuanto a la verificación: como se ha visto antes, las preferencias son privadas, se revelan indirectamente en el comportamiento del agente. De ahí que cuanto más variadas sean las preferencias, más difícil resulte comprobar si la teoría es cierta o no. En cuanto a la tautología: si al agente puede atribuírsele cualquier tipo de preferencia, al final siempre podremos conseguir una explicación de su acción. El supuesto de egoísmo es tan sólo un caso especial, aunque habitual, de comportamiento auto-interesado. En el plano de abstracción en el que todavía nos estamos moviendo, el principio de racionalidad se define a partir del comportamiento auto-interesado, no a partir del comportamiento egoísta. Con otras palabras, tener preferencias no egoístas no implica que el agente sea irracional. Otra cosa es que cuando la teoría se aplique en situaciones concretas, se suponga que el comportamiento auto-interesado sea de naturaleza egoísta.

En este capítulo se define el principio de racionalidad en los términos más generales posibles, sin realizar supuesto alguno sobre el contenido de las preferencias del agente. Para ello, conviene analizar formalmente el concepto de preferencia y sus propiedades. La preferencia se puede definir como una relación binaria entre alternativas. Para explicar qué quiere decir esto exactamente, comenzaremos situándonos en un contexto de certidumbre, en el que cada acción del agente se asocia a un resultado único. Por ejemplo, al elegir entre ir al cine o al fútbol, mi decisión se realiza con certidumbre. En cambio, al elegir entre dos partidos políticos en unas elecciones, actúo con incertidumbre, pues nunca puedo estar seguro de antemano acerca de qué van a hacer los partidos en caso de llegar al poder.

Con certidumbre, tenemos un conjunto de acciones $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, un conjunto de resultados producidos por las acciones $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ y una función $x: A \to X$ que establece que a cada acción le corresponde un único resultado. Pues bien, en este contexto de certidumbre, las preferencias se pueden definir igualmente en términos de acciones o de resultados. Con otras palabras, al decir que las preferencias son relaciones binarias entre alternativas, las alternativas pueden ser tanto acciones como resultados. Cuando pasemos a examinar el caso de la incertidumbre, veremos que las preferencias se definen sólo en términos de acciones.

La relación binaria de preferencia entre dos resultados cualesquiera x_i y x_j se representa así:

$$x_i R x_j$$

La expresión anterior se interpreta de la siguiente forma: el resultado x_j no se prefiere al resultado x_i, o, lo que es igual, x_i es al menos tan bueno como x_j. Técnicamente, a esta relación binaria se le llama preferencia débil, frente a la preferencia estricta, que se presenta como un caso especial y representamos como la relación *P*. La definición es la siguiente:

$$x_i P x_j \text{ si y sólo si sucede que } x_i R x_j \text{ y } \sim x_j R x_i$$

El signo '~' representa la negación lógica. Por tanto, decimos que x_i se prefiere estrictamente a x_j cuando x_i es al menos tan bueno como x_j y no es cierto que x_j sea tan bueno como x_i. Igualmente, podemos definir la relación *I* de indiferencia como sigue:

$$x_i I x_j \text{ si y sólo si sucede que } x_i R x_j \text{ y } x_j R x_i$$

El agente es racional cuando el agente elige en función de sus preferencias (frente a los impulsos, la tradición, la imitación o cualquier otra forma de motivación que no sea reducible a preferencias) y estas preferencias cumplen ciertas condiciones que garantizan su coherencia interna. En concreto, las preferencias han de ser una ordenación débil. Una relación binaria es una ordenación débil cuando cumple tres propiedades, la completitud, la reflexividad y la transitividad. A continuación se definen estas tres propiedades:

(1) Completitud: dados dos resultados cualesquiera, tiene que suceder alguna de estas tres cosas siendo '|' y '&' los símbolos lógicos de la disyunción y la conjunción respectivamente:

$$x_i R x_j \mid x_j R x_i \mid (x_i R x_j \;\&\; x_j R x_i)$$

(2) Reflexividad: para todo resultado x_i, $x_i R x_i$

(3) Transitividad: para cualquier subconjunto de tres resultados, se cumple que

$$x_i R x_j \;\&\; x_j R x_k \quad \rightarrow \quad x_i R x_k$$

Con palabras: la propiedad de la completitud requiere que ante dos resultados cualesquiera, el agente sea capaz de compararlos y definir sus preferencias, contemplándose, claro está, la posibilidad de la indiferencia. Sola-

mente se excluye la posibilidad de que haya resultados tan distintos entre sí que no sean comparables en ningún sentido. La reflexividad es una propiedad trivial: cualquier resultado es tan bueno como sí mismo. La propiedad más importante es, sin duda, la de la transitividad, pues garantiza que las elecciones del agente tengan sentido. Si x_1 se prefiere a x_2 y x_2 a x_3, no tendría sentido que x_3 se prefiriera a x_1. El agente adoptaría cursos de acción contradictorios si sus preferencias no cumplieran la propiedad de ser transitivas.

El principio de racionalidad puede formularse entonces del siguiente modo: un agente es racional si actúa en función de sus preferencias y sus preferencias son una ordenación débil (cumplen las propiedades de completitud, reflexividad y transitividad).

Funciones de utilidad

Una función de utilidad asigna números a las preferencias. Dichos números miden la utilidad o el bienestar que una persona obtiene si se da un cierto resultado cuando realiza una acción. La utilidad, por tanto, no es más que la traducción cuantitativa de las preferencias. Cuando hablamos en estos términos, el supuesto de racionalidad implica que el agente elige aquella acción que maximiza su función de utilidad. Como el valor máximo de la función equivale a la opción más preferida, decir que alguien actúa racionalmente cuando elige a partir de sus preferencias o cuando maximiza su función de utilidad es equivalente. En cualquier caso, es fundamental recordar que la relación más básica es la de preferencia. Porque preferimos x_i a x_j, x_i nos proporciona más utilidad que x_j y no al revés: no es que porque x_i proporciona más utilidad que x_j preferimos x_i a x_j. Valga la siguiente analogía: así como no decimos que hace más calor porque el termómetro marca una temperatura más alta, sino que el termómetro marca una temperatura más alta porque hace calor, tampoco se prefiere algo porque proporcione más utilidad, sino que proporciona más utilidad porque se prefiere en mayor medida que otras cosas.

Las funciones de utilidad tienen grados diversos de complejidad según el contexto de la acción en el que se apliquen. Siguiendo con el esquema propuesto en la introducción, lo fundamental es averiguar si el agente, al actuar, tiene o no certidumbre acerca de los resultados que su acción provocará. La incertidumbre, como veremos en seguida, introduce cierta complicación en el análisis.

Funciones de utilidad en contextos paramétricos de certidumbre

Si hay certidumbre, basta, para representar las preferencias del agente, una función de utilidad ordinal, es decir, una función que ordena resultados pero no mide la distancia que hay en términos de utilidad entre un resultado y otro. Cuando se sabe a ciencia cierta qué resultado va a producir la acción, el resultado más preferido es el que proporciona más utilidad y por tanto da igual a qué distancia en utilidad esté ese resultado del siguiente, puesto que el agente siempre elige su primera preferencia. A fin de caracterizar la elección racional, basta por tanto con que la función ordene las preferencias.

Sea $U(x_i)$ la utilidad que proporciona el resultado x_i. Formalmente, podemos caracterizar así la propiedad específica de las funciones de utilidad en contextos de certidumbre:

$$\text{Si} \quad x_i \geq x_j, \quad \text{entonces} \quad U(x_i) \geq U(x_j).$$

Lo único que importa en esta función de utilidad es que el primer número sea mayor que el segundo, dando igual cuánto mayor sea. Por ejemplo, si las preferencias son tales que $x_1 \geq x_2 \geq x_3$, cualquier función de utilidad que satisfaga $U(x_1) \geq U(x_2) \geq U(x_3)$ representa igualmente bien el orden de preferencias subyacente. Las dos funciones siguientes son iguales:

Función A	Función B
$U(x_1) = 100$	$U(x_1) = 1$
$U(x_2) = 25$	$U(x_2) = 0$
$U(x_3) = -1.000$	$U(x_3) = -1$

Nótese que no hay ninguna relación lineal entre ambas funciones. Las dos funciones reflejan igualmente el orden de preferencias porque en ambos casos x_1 es el resultado más preferido, x_3 el menos, y x_2 ocupa la posición intermedia.

Funciones de utilidad con incertidumbre

Cuando no hay certidumbre, el agente no puede saber con seguridad cuál va a ser el resultado de cada una de sus acciones. Por tanto, no podemos asignar un resultado único a una acción y a continuación calcular la utilidad de la acción a partir de la utilidad del resultado. Ahora la utilidad ha de ser calculada teniendo en cuenta todos los resultados que una acción puede producir. De este modo, el argumento de la función de utilidad son ahora las

acciones, no los resultados, pues el agente puede elegir directamente entre diversos cursos de acción, pero no tiene la capacidad de elegir resultados.

La ontología del problema de decisión se complica en consecuencia. Antes era suficiente con definir un conjunto A de acciones y un conjunto X de resultados. Cabía definir una función x: $A \to X$ que establecía qué resultado x se asociaba a cada acción a. Ahora tenemos que introducir un nuevo elemento, los estados del mundo. Diremos que hay un conjunto $E = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$ en el que cada elemento es un estado del mundo que determina si una acción produce un resultado u otro. Formalmente, se construirá una función $x(a, e)$: $A \times E \to X$, en la que los resultados se derivan de una combinación de acciones y estados del mundo.

La mejor manera de ilustrar esta idea será a través de un ejemplo. Supongamos un político que es acusado con fundamento de haber malversado fondos. El político no sabe si las acusaciones se basan en pruebas o son sólo meras sospechas. Hay dos estados del mundo acerca de los cuales no tiene certidumbre: o bien hay pruebas que respaldan las acusaciones o bien no las hay. El político puede hacer tres cosas: negarlo todo, reconocer una parte o reconocerlo todo. Los datos del problema, incluyendo los resultados, se resumen en el cuadro 1.1. Si el político lo niega todo y el estado del mundo es aquel en el que no hay pruebas, sale reforzado en su posición por haber sido víctima de un ataque injusto; si lo niega todo y, sin embargo, el estado del mundo es aquel en el que hay pruebas, se le obliga a dimitir. Si lo confiesa todo, da igual el estado del mundo, el caso es que se le obliga a dimitir. Si confiesa parte, sale debilitado haya o no pruebas, pero no se fuerza su destitución por haber hecho frente a las acusaciones siendo sincero hasta cierto punto.

CUADRO 1.1

EL PROBLEMA DEL POLÍTICO CORRUPTO

Acciones	*Estados del mundo*	
	Hay pruebas (e_1)	*No hay pruebas* (e_2)
Negarlo todo (a_1)	Destituido (x_1)	Reforzado (x_3)
Confesar parte (a_2)	Debilitado (x_2)	Debilitado (x_2)
Confesar todo (a_3)	Destituido (x_1)	Destituido (x_1)

Dado lo que sabemos acerca de las motivaciones y los comportamientos de los políticos en una democracia, no es demasiado arriesgado imputar

unas preferencias según las cuales el político prefiere salir reforzado a quedar debilitado y prefiere también quedar debilitado a ser destituido:

$$x_3 \geq x_2 \geq x_1$$

El problema radica en que el político no puede elegir directamente el resultado de salir reforzado. Para conseguir ese resultado, tiene que elegir la acción de negar todas las acusaciones, pero acabamos de ver que dicha acción produce resultados inciertos, pues dependiendo de cuál sea el estado del mundo verdadero, su acción puede dar lugar al resultado más deseado, salir reforzado, pero también al menos deseado, ser destituido. ¿Cómo realiza su elección entonces el agente racional?

La teoría de la elección racional se limita en este punto a formalizar el sentido común. Éste nos indica que el político se arriesgará a negarlo todo si considera que el estado del mundo en el que no hay pruebas es muy probable. Si, por el contrario, piensa que lo más probable es que haya pruebas, elegirá otras acciones antes que negarlo todo. Lo que hace el agente, por tanto, es ponderar los resultados posibles de las acciones por su probabilidad de ocurrencia. De esta manera, el agente puede valorar y comparar entre sí los distintos cursos de acción incluso cuando hay incertidumbre.

La idea fundamental de utilidad esperada recoge esta intuición. Para su definición formal, necesitamos los siguientes elementos. Primero, las probabilidades de ocurrencia de los distintos estados del mundo, o lo que es igual, una distribución de probabilidad sobre los estados del mundo. La probabilidad de cada estado del mundo la representaremos genéricamente como $p(e)$. La suma de todas ellas, evidentemente, da 1. Estas probabilidades pueden entenderse en sentido objetivo, como frecuencias relativas en el límite, o en sentido subjetivo, como creencias del agente acerca del mundo. En el ejemplo del político corrupto, las probabilidades son claramente creencias, ya que no cabe aplicar en este contexto frecuencias relativas. Segundo, tenemos la utilidad de los resultados, que representaremos como $U[x(a, \mathrm{e})]$, es decir, la utilidad del resultado x que resulta de la acción a en un estado del mundo e. Por último, tenemos la utilidad esperada asociada a una acción a, que representaremos como $UE(a)$, y que definiremos como la suma de las utilidades de todos los resultados posibles asociados a la acción a ponderados por su probabilidad de ocurrencia en cada caso. Es decir,

$$UE(a) = \sum p(e)U[x(a, e)], \sum p = 1$$

A continuación intentaremos aplicar la utilidad esperada en el ejemplo del político corrupto. Para ello, daremos valores a las probabilidades de los dos estados del mundo (que haya pruebas o que no las haya). Además, asignaremos unos valores arbitrarios entre 0 y 1 a la utilidad de los resultados. En la sección siguiente veremos cómo pueden establecerse esos valores

numéricos de tal manera que reflejen las preferencias del agente. En concreto, supondremos lo siguiente:

U(Reforzado) = 1 p(Hay pruebas) = 0,2

U(Debilitado) = 0,6 p(No hay pruebas) = 0,8

U(Destituido) = 0

Dadas estas medidas de utilidad con respecto a los resultados y dadas estas probabilidades o creencias, podemos calcular ahora la utilidad esperada que corresponde a cada acción posible:

UE(Negarlo todo) = p(Hay pruebas)U(Destituido) + + p(No hay pruebas)U(Reforzado)

Sustituyendo,

UE(Negarlo todo) = 0,2*0 + 0,8*1 = 0,8.

Igualmente, para la acción de confesar parte:

UE(Confesar parte) = p(Hay pruebas)U(Debilitado) + + p(No hay pruebas)U(Debilitado)

Sustituyendo,

UE(Confesar parte) = 0,2*0,6 + 0,8*0,6 = 0,6.

Finalmente, en cuanto a confesarlo todo,

UE(Confesar todo) = p(Hay pruebas)U(Destituido) + p(No hay pruebas)U(Destituido)

Sustituyendo,

UE(Confesar todo) = 0,2*0 + 0,8*0 = 0.

La mayor utilidad esperada se produce cuando el político lo niega todo. Por lo tanto, un político racional negará las acusaciones de escándalo si los datos del problema se corresponden con los que aquí hemos supuesto. Negarlo todo maximiza la utilidad del agente. Por supuesto, podría suceder que

los distintos resultados se valoraran de otra forma, o que el político tuviese distintas creencias sobre si hay pruebas o no. Por ejemplo, supóngase que, manteniendo constantes las utilidades de los resultados, queremos saber con qué creencias sobre la existencia de pruebas el político preferirá confesar parte a negarlo todo. Es decir, lo que se pide es resolver la siguiente inecuación o desigualdad:

$$UE(\text{Confesar parte}) \geq UE(\text{Negarlo todo})$$

Dando valores a todo menos a p, que es lo que queremos averiguar, la desigualdad a resolver se puede expresar así:

$$p0{,}6 + (1-p)0{,}6 > p0 + (1-p)1$$

Es fácil darse cuenta de que esta desigualdad sólo se cumple cuando $p \geq 0{,}4$. Si la creencia de que hay pruebas es superior a 0,4, entonces el político confesará parte, pues esa acción es la que ahora maximiza su utilidad.

En este ejemplo es evidente que la clave está en que la utilidad que se asigna a los resultados tenga alguna justificación. Y esto por dos razones: primero, porque si podemos alterar a conveniencia la utilidad de los resultados, la utilidad esperada de cada acción variará arbitrariamente. Segundo, porque estamos ponderando dichas utilidades por las probabilidades contenidas en las creencias y esa ponderación sólo tiene sentido si dichas utilidades no son arbitrarias. Con otras palabras, lo que se revela en el ejemplo anterior es que tanto las utilidades de los resultados como la propia utilidad esperada se tienen que expresar cardinalmente, no ordinalmente. Importa no sólo el orden de las utilidades, sino también la distancia entre ellas. La cuestión es: ¿hay alguna forma de definir cardinalmente la utilidad para que pueda aplicarse el principio de utilidad esperada? La respuesta es afirmativa. Fueron los fundadores de la teoría de juegos, John von Neumann y Oskar Morgenstern, los que propusieron una solución.

Las funciones de utilidad Von Neumann-Morgenstern

Las funciones de utilidad Von Neuman-Morgenstern son cardinales porque sus creadores consiguieron idear un método no arbitrario para asignar valores numéricos a los resultados. Se trata de ver cómo se valoran los resultados intermedios (los que están entre el mejor y el peor resultado) en términos de una *lotería* en la que sólo intervengan el mejor y el peor resultado. Una lotería L se define como un emparejamiento de probabilidades y resultados. Formalmente,

$$L = (p_1x_1, p_2x_2, \dots, p_nx_n), \qquad \sum p_i = 1$$

Von Neumann y Morgenstern utilizan esta definición de lotería para conseguir utilidades cardinales. En el ejemplo del político corrupto, teníamos tres resultados, "reforzado", "debilitado" y "destituido". De lo que se trata es de expresar la utilidad del resultado intermedio, "debilitado", en términos de una lotería entre el mejor y el peor resultado, es decir, en términos de "reforzado" y "destituido". Más concretamente, de lo que se trata es de medir la valoración del resultado intermedio en términos del riesgo que estaría el agente dispuesto a asumir por conseguir el mejor resultado, "reforzado".

Veamos esto con un poco de detalle. Supongamos que al político se le plantea este dilema: ha de elegir entre quedar debilitado con seguridad, o una lotería en la que hay una probabilidad de dos quintos (40%) de salir reforzado y una probabilidad de tres quintos (60%) de ser destituido. La lotería se representaría formalmente como $(0{,}4x_3,\ 0{,}6x_1)$. En este caso, el político dice que prefiere salir debilitado con seguridad a participar en semejante lotería. Esto es así porque la valoración relativa de salir debilitado frente a salir reforzado no queda bien reflejada en la lotería anterior: el político necesita una probabilidad todavía mayor de salir reforzado para aceptar la lotería. Si la lotería fuese en cambio $(0{,}8x_3,\ 0{,}2x_1)$, el político preferiría jugar dicha lotería a salir debilitado con seguridad. Podemos seguir afinando en este intercambio entre un resultado seguro y una lotería en la que intervengan el primer y el último resultado hasta llegar a un punto de indiferencia. Con los datos del ejemplo, supondremos que el político es indiferente entre salir debilitado con certeza y la lotería $(0{,}6x_3,\ 0{,}4x_1)$. En cierto modo, esto significa que el resultado intermedio, salir debilitado, vale un 60% con respecto al primer resultado, que es salir reforzado.

La forma de medir cardinalmente las utilidades de los resultados consiste en encontrar el punto de indiferencia entre un resultado intermedio seguro y una lotería en la que sólo intervengan el mejor y el peor resultado. Por comodidad, "normalizamos" la escala de utilidad, forzando que el mejor resultado valga 1 y el peor 0. Las opciones intermedias se sitúan entre 0 y 1 dependiendo del riesgo que el agente esté dispuesto a asumir por jugar tal lotería. Cuanto mayor sea la probabilidad de conseguir el mejor resultado que es necesaria para conseguir la indiferencia, menor es el riesgo que está dispuesto a asumir el agente, lo que significa que más valora la opción intermedia. En el ejemplo partimos de esta situación:

$$U(x_3) = 1$$

$$U(x_1) = 0$$

$$U(x_2) = U(L(0{,}6x_3,\ 0{,}4x_1) = 0{,}6$$

Como la utilidad de x_2 es la misma que la de la lotería L, y la lotería L tiene una utilidad esperada de 0,6 (0,6*1 + 0,4*0), asignamos la utilidad 0,6 a x_2. De esta manera, hemos conseguido una forma no arbitraria de asignar

utilidad cardinal a los resultados. Lo mismo podríamos hacer si hubiera más de un resultado intermedio. En ese caso, se busca una relación de indiferencia entre cada resultado intermedio y la respectiva lotería entre el mejor y el peor resultado posible.

Una vez visto qué es una lotería y cómo se asignan valores cardinales a los resultados en función de loterías especiales en las que sólo intervienen el mejor y el peor resultado, podemos caracterizar con más rigor en qué consiste una función de utilidad Von Neumann-Morgenstern. La novedad principal de estas funciones es que se definen sobre loterías. Es decir, dadas varias loterías, la función de utilidad Von Neumann-Morgenstern asigna números cardinales a cada lotería que reflejan la intensidad de las preferencias subyacentes sobre dichas loterías. ¿Qué interés tiene definir la función de utilidad a partir de loterías? En realidad, es la única manera de resolver el problema general de la utilidad esperada. Supongamos que el agente tiene que elegir entre estas dos loterías L y L', donde x_1 es el mejor resultado, x_4 el peor y x_2 y x_3 los resultados intermedios:

$$L = (0{,}4x_1,\ 0{,}1x_2,\ 0{,}2x_3,\ 0{,}3x_4)$$
$$L' = (0{,}2x_1,\ 0{,}3x_2,\ 0{,}3x_3,\ 0{,}2x_4)$$

Para poder resolver un problema así, necesitamos en primer lugar conocer la equivalencia entre las opciones intermedias y las loterías correspondientes que sólo contengan la mejor y la peor opción. Supóngase que estas equivalencias son las siguientes:

$$x_2 \approx (0{,}7x_1,\ 0{,}3x_4)$$
$$x_3 \approx (0{,}4x_1,\ 0{,}6x_4)$$

Ahora podemos sustituir en L y L' los resultados intermedios por sus correspondientes loterías:

$$L = (0{,}4x_1,\ 0{,}1[0{,}7x_1,\ 0{,}3x_4],\ 0{,}2[0{,}4x_1,\ 0{,}6x_4],\ 0{,}3x_4)$$
$$L' = (0{,}2x_1,\ 0{,}3[0{,}7x_1,\ 0{,}3x_4],\ 0{,}3[0{,}4x_1,\ 0{,}6x_4],\ 0{,}2x_4)$$

Con esta transformación, las dos loterías L y L' se componen únicamente del mejor y el peor resultado. Basta con distribuir y agrupar términos para poder comparar inmediatamente cuál de las dos loterías proporciona una probabilidad mayor de conseguir el mejor resultado. Dicha lotería será la que elija el agente:

$$L = (0{,}4x_1,\ 0{,}07x_1,\ 0{,}03x_4,\ 0{,}08x_1,\ 0{,}12x_4,\ 0{,}3x_4) = (0{,}55x_1,\ 0{,}45x_4)$$
$$L' = (0{,}2x_1,\ 0{,}21x_1,\ 0{,}09x_4,\ 0{,}12x_1,\ 0{,}18x_4,\ 0{,}2x_4) = (0{,}53x_1,\ 0{,}47x_4)$$

Puesto que la probabilidad de obtener el mejor resultado posible es más alta en L que en L', un agente racional elegirá L. Esta forma de tomar una decisión es lo que se conoce en la teoría de la utilidad como *sure-thing principle*.

Las funciones de utilidad Von Neumann-Morgenstern desempeñan un papel crucial no sólo en la teoría de utilidad: los pagos de los juegos que vamos a ver en los siguientes capítulos están medidos en utilidad Von Neumann-Morgenstern. Estas funciones de utilidad permiten hacer cálculos de utilidad esperada gracias al procedimiento de definir las opciones intermedias en términos de loterías entre la mejor y la peor opción. De este modo, se pueden comparar y valorar diversas loterías, justo lo que buscábamos para un contexto de incertidumbre, en el que cada acción equivale a una lotería en la que se combinan probabilidades y resultados [1].

Actitud hacia el riesgo

El riesgo es la clave para medir la intensidad de las preferencias del agente. Se pueden medir dichas intensidades porque las funciones de utilidad son ahora cardinales. Pero podemos ir más lejos en el análisis del riesgo. Así, cabe determinar la actitud que la persona adopte hacia el riesgo, e incorporar dicha actitud en la propia función de utilidad. Se trata de comprobar si el agente es indiferente o no entre jugar una lotería y obtener con seguridad el valor esperado de la lotería.

Sea la lotería $Z = \{pz_1,(1-p)z_2\}$. Podemos definir el *valor esperado* de Z de la siguiente manera:

$$E(Z) = pz1 + (1-p)z_2$$

A su vez, podemos calcular la *utilidad esperada* de la lotería:

$$UE(Z) = pU(z_1) + (1-p)U(z_2)$$

Pues bien, la actitud hacia el riesgo se mide en función de la relación que haya entre el valor esperado de la lotería y la utilidad esperada de la lotería, es decir, entre $E(Z)$ y $UE(Z)$. Si la persona es indiferente entre jugar la lotería

[1] El lector interesado en la teoría de la utilidad debería consultar un manual más avanzado para obtener una exposición más completa sobre esta materia. Normalmente, se presenta una serie de axiomas sobre la utilidad y a continuación se demuestra un teorema de existencia, según el cual si se satisfacen todos esos axiomas, está garantizado que hay una función de utilidad esperada que refleja las preferencias del agente. Con el fin de hacer más accesible la presentación del material, aquí se ha optado por eliminar la presentación axiomática.

y el valor esperado de la lotería, quiere decir que es indiferente al riesgo. Si, por el contrario, prefiere jugar la lotería que recibir el valor esperado de la misma, entonces el agente es propenso al riesgo. Finalmente, si prefiere recibir el valor esperado de la lotería a jugar la lotería, es que el agente es averso al riesgo.

Una forma equivalente de definir la actitud hacia el riesgo consiste en investigar la prima de riesgo *(risk premium)* de la función de utilidad. Sea z^* un resultado cierto cuya utilidad es la misma para el agente que la utilidad esperada de jugar la lotería Z: $U(z^*) = UE(Z)$. La prima de riesgo $\pi(Z)$ se define entonces de esta manera:

$$\pi(Z) = E(Z) - z^*$$

Puede interpretarse como la cantidad de dinero que el agente está dispuesto a sacrificar para obtener un resultado seguro en lugar de tener que jugar la lotería. Un ejemplo ayudará a entender mejor este concepto. Sea $Z = \{4/5\ 1€,\ 1/5\ 16€\}$. El valor esperado de la lotería, medido en euros, es:

$$\mathrm{E(Z)} = \frac{4}{5}€ + \frac{16}{5}€ = \frac{20}{5}€ = 4€$$

La función de utilidad es $U(x) = 4\sqrt{x}$. Podemos ahora calcular la utilidad esperada de la lotería Z, $UE(Z)$, dada la función de utilidad especificada:

$$UE(Z) = \frac{4}{5}U(1) + \frac{1}{5}U(16) = \frac{4}{5}4\sqrt{1} + \frac{1}{5}4\sqrt{16} = \frac{16}{5} + \frac{16}{5} = 6{,}4$$

Pues bien, la utilidad del valor esperado de la lotería, $U(E(Z))$, es

$$U(4) = 4\sqrt{4} = 8$$

Puesto que $8 > 6{,}4$, vemos que $U(E(Z)) > UE(Z)$. Por tanto, un agente con esa función de utilidad es averso al riesgo: prefiere el valor esperado de la lotería a jugar la lotería. La prima de riesgo se calcula de la siguiente manera: sea z^* el resultado seguro que proporciona la misma utilidad que jugar la lotería. La utilidad esperada de jugar la lotería es, según acabamos de ver, 6,4. Por tanto, el problema que hemos de resolver es éste:

$$4\sqrt{z^*} = 6{,}4$$

Despejando z^*, tenemos que $z^* = 2{,}56€$. Es decir, el agente, dada su aversión al riesgo, es indiferente entre obtener con seguridad 2,56€ y jugar una lotería que proporciona un valor esperado de 4€. La diferencia entre ambas

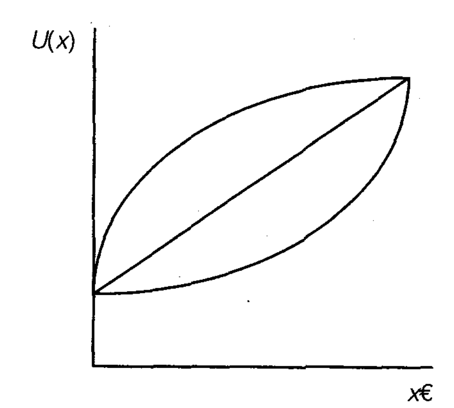
cantidades es la prima de riesgo, 4€ – 2,56€ = 1,44€. La cantidad de 1,44€ representa lo que el agente está dispuesto a pagar con tal de no incurrir en riesgo jugando la lotería. Es, por tanto, lo que el agente está dispuesto a sacrificar en dinero para poder conseguir un resultado seguro. Otra manera de interpretar este resultado consiste en entender la cantidad 2,56€ como el dinero que el agente averso al riesgo está dispuesto a pagar por jugar la lotería *Z*, que tiene un valor esperado de 4€.

Pues bien, las personas aversas al riesgo están dispuestas a pagar una prima de riesgo (su prima de riesgo es positiva), mientras que las personas indiferentes ante el riesgo tienen una prima de riesgo 0 y las personas propensas al riesgo tienen una prima de riesgo negativa (están dispuestas a pagar dinero por jugar la lotería en lugar de obtener el valor esperado de la misma).

Desde un punto de vista matemático, la actitud hacia el riesgo se puede determinar mediante el signo de la segunda derivada de la función de utilidad. El gráfico 1.1 muestra la representación gráfica de tres funciones de utilidad. En el eje horizontal tenemos los pagos que recibe el agente medidos en dinero, en euros. En el eje vertical figura la utilidad que proporciona el dinero. Los tres tipos de actitud hacia el riesgo se corresponden con cada una de las curvas de utilidad del gráfico 1.1. La neutralidad queda representada por la línea recta del centro, donde la utilidad tiene una relación lineal con el dinero. La curva de aversión al riesgo es cóncava, con segunda derivada negativa, y por tanto va por encima de la recta de neutralidad. La curva de propensión es convexa, con segunda derivada positiva, y va por debajo de la de neutralidad.

GRÁFICO 1.1

REPRESENTACIÓN DE LAS ACTITUDES HACIA EL RIESGO



En el ejemplo anterior, en el que la función de utilidad era $U(x) = 4\sqrt{x}$, la primera y segunda derivada son:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{2}{\sqrt{x}}; \qquad \frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Puesto que la segunda derivada tiene signo negativo, concluimos que el agente es averso al riesgo.

En el cuadro 1.2 aparece un resumen de los criterios para medir la utilidad hacia el riesgo.

CUADRO 1.2

MEDICIÓN DE LA ACTITUD HACIA EL RIESGO

	Relación entre $U(E(Z))$ *y* $EU(Z)$	*Prima de riesgo* $\pi(Z)$	*Segunda derivada*
Aversión al riesgo	$U(E(Z)) > EU(Z)$	$\pi(Z) > 0$	U'' < 0 (concavidad)
Neutralidad ante el riesgo	$U(E(Z)) = EU(Z)$	$\pi(Z) = 0$	U'' = 0 (linealidad)
Propensión al riesgo	$U(E(Z)) < EU(Z)$	$\pi(Z) < 0$	U'' > 0 (convexidad)

En teoría económica suele suponerse que las personas tienen aversión al riesgo. Una vez establecido este supuesto, hay dos coeficientes interesantes para analizar. Primero, el coeficiente de aversión absoluta al riesgo (ARA, *absolute risk aversion*), que se define así:

$$r_a(x) = \frac{-U''(x)}{U'(x)}$$

Este coeficiente permite comparar la aversión al riesgo entre distintos agentes. Nótese que no basta con comparar la segunda derivada de sus respectivas funciones de utilidad, puesto que las funciones Von Neumann-Morgenstern son linealmente transformables (se pueden multiplicar por una constante o sumarle una cantidad sin que las propiedades de la función se alteren). En este sentido, una transformación lineal de la función puede afectar a la magnitud de la segunda derivada, imposibilitando así cualquier

comparación entre personas. Sin embargo, el cociente de las derivadas segunda y primera permite superar este inconveniente.

Siguiendo con el ejemplo anterior, el coeficiente r_a se calcularía así:

$$r_a(x) = \frac{-(-x^{-3/2})}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2}x^{-1}$$

El coeficiente, nótese, siempre es positivo, puesto que la segunda derivada siempre es negativa en funciones de utilidad con aversión al riesgo.

Por último, podemos calcular también el coeficiente de aversión relativa al riesgo (RRA, *relative risk aversion*):

$$r_r(x) = xr_a(x) = \frac{-U''(x)x}{U'(x)}$$

Mientras r_a mide la actitud hacia el riesgo con respecto a ganancias o pérdidas absolutas, r_r mide dicha actitud con respecto a ganancias o pérdidas relativas. Este coeficiente, por ejemplo, desempeña un papel crucial en el modelo de Breen y Goldthorpe (1997) que intenta explicar las diferencias de clase social en los niveles de educación alcanzados mediante teoría de la utilidad. Así, los autores demuestran cómo, teniendo idénticos coeficientes de aversión relativa al riesgo, las familias de las clases altas tienen mayor probabilidad de continuar con los estudios que las familias de clases bajas debido a que las clases bajas se juegan más en las decisiones educativas que las clases altas.

La paradoja de Allais

A pesar de que la teoría de la utilidad parece basarse en premisas ciertas, poco discutibles en cualquier caso, y de que la teoría sea en cierto modo una lógica de la elección, igual que la lógica inferencial es una lógica de la argumentación, lo cierto es que numerosos experimentos realizados desde mediados del siglo XX demuestran que las personas se desvían sistemáticamente de lo que cabe esperar según la teoría de la utilidad. Los agentes no siempre siguen un curso de acción lógico. A la vista de estos resultados, se han intentado diversas reformas de la teoría de la utilidad que aproximen algo los resultados teóricos a los resultados empíricos. Una visión panorámica de estos esfuerzos puede encontrarse en Kahneman y Tversky (2000).

Aunque aquí no se consideran teorías heterodoxas de la elección, se analiza una de las paradojas o resultados chocantes que han contribuido a su desarrollo, la paradoja de Allais (sigo la presentación de Binmore 1992: 115-117). Un agente ha de elegir entre dos cursos de acción, L o M. Hay tres

posibles estados del mundo, *S*, *T* y *U*. El agente no sabe cuál es el estado del mundo verdadero, pero conoce sus probabilidades de ocurrencia: $p(S) = 0{,}01$, $p(T) = 0{,}1$ y $p(U) = 0{,}89$. Los resultados de las acciones dependen de qué estado del mundo finalmente se dé. Una vez el agente ha elegido entre *L* y *M*, se le da a elegir entre otras dos alternativas, que llamaremos ahora *L'* y *M'*, variando los pagos pero con las mismas creencias sobre los estados del mundo.

CUADRO 1.3

LA PARADOJA DE ALLAIS

	S $p(S) = 0{,}01$	*T* $p(T) = 0{,}1$	*U* $p(U) = 0{,}89$
L	500.000€	500.000€	500.000€
M	0€	2.500.000€	500.000€
L'	500.000€	500.000€	0€
M'	0€	2.500.000€	0€

En el cuadro 1.3 tenemos un resumen de la situación. Mientras hacer *L* tiene un resultado seguro, 500.000€, hacer *M* puede dejarnos sin nada con probabilidad 0,01, hacernos ganar dos millones y medio de euros con probabilidad 0,1, o hacernos ganar medio millón de euros con probabilidad 0,89. En cuanto al segundo problema, hay que elegir ahora entre las loterías *L'* y *M'*. Si el agente elige *L'* frente a *M'*, se lleva 500.000€ con una probabilidad de 0,11 o 0€ con una probabilidad de 0,89. Si elige *M'* frente a *L'*, se lleva 2.500.000€ con una probabilidad de 0,1 o 0€ con una probabilidad de 0,9.

Al elegir entre *L* y *M* por un lado y entre *L'* y *M'* por otro, muchas personas eligen en el primer caso *L* y en el segundo *M'*. Sin embargo, es fácil demostrar que esas elecciones son incoherentes.

Podemos entender que *L*, *M*, *L'* y *M'* son loterías. Puesto que la mejor consecuencia es 2.500.000€ y la peor 0€, cabe definir las utilidades así:

$$U(2.500.000) = 1$$

$$U(500.000) = z \qquad 0 < z < 1$$

$$U(0) = 0$$

Por el momento da igual el valor de *z*, siempre y cuando sea el mismo en ambos problemas de decisión. La utilidad esperada de las dos primeras loterías, *L* y *M*, es:

$$UE(L) = 0{,}01*z + 0{,}1*z + 0{,}89*z = z$$

$$UE(M) = 0{,}01*0 + 0{,}1*1 + 0{,}89*z = 0{,}1 + 0{,}89z$$

Si el agente elige *L* frente a *M*, entonces es que *UE(L) > UE(M)*, es decir:

$$z > 0{,}1 + 0{,}89z$$

Si despejamos con respecto a *z*, nos queda:

$$z > \frac{0{,}1}{0{,}11}$$

Veamos ahora si este resultado es coherente con la elección de *M'* frente a *L'*:

$$UE(L') = 0{,}01*z + 0{,}1*z + 0{,}89*0 = 0{,}11z$$

$$UE(M') = 0{,}01*0 + 0{,}1*1 + 0{,}89*0 = 0{,}1$$

Si el agente elige *M'*, es porque *UE(M')>UE(L')*, es decir:

$$0{,}1 > 0{,}11z$$

Despejando de nuevo con respecto a *z*, obtenemos:

$$z < \frac{0{,}1}{0{,}11}$$

Pero este resultado contradice el anterior. Por tanto, si en el primer caso elige *L* frente a *M* y en el segundo *M'* frente a *L'*, está violando alguno de los supuestos básicos de la teoría de la utilidad: su comportamiento es irracional. Lo más desconcertante es que haya un porcentaje importante de gente en los experimentos de laboratorio que llevan a cabo este tipo de comportamiento incoherente. La sugerencia principal para entender lo que está sucediendo es que las personas no valoran por igual el riesgo de ganar algo y el riesgo de perderlo, aunque en los términos estrictos de la teoría dichos riesgos sean estrictamente equivalentes. Cuando en la elección entre *L* y *M* el agente elige *L*, suele ser porque da mucha importancia a una probabilidad pequeña de quedarse sin nada si elige *M*. En cambio, cuando elige *M'* entre *L'* y *M'*, el agente se deja guiar en mayor medida no por el riesgo de perder, sino por la probabilidad de ganar dos millones y medio de euros. Esta variación psicológica en la forma de calibrar pérdidas y ganancias va más allá de las consideraciones que la teoría estándar de la utilidad contempla.

Si no se profundiza más en este tipo de desviaciones empíricas con respecto a la teoría es porque la teoría de juegos incorpora la teoría de la utilidad estándar, sin dar demasiada importancia a anomalías como las de la paradoja de Allais.

Aplicación: La moderación de los partidos

A continuación se muestra un modelo formal paramétrico en el que sólo intervienen cálculos de utilidad. El problema que investiga es el siguiente: ¿bajo qué condiciones un partido que está en la oposición trata de acercarse al votante mediano para ganar las elecciones? El análisis de este problema permite poner en práctica lo aprendido hasta el momento y conocer un tipo de función de utilidad frecuente en la ciencia política y la teoría económica, las funciones euclídeas o espaciales.

Supongamos que los votantes se ordenan en un eje o dimensión espacial izquierda-derecha. Estos votantes votan al partido que esté ideológicamente más próximo a sus preferencias. Podemos decir que la utilidad que recibe un votante de que un partido u otro gobierne es una función decreciente de la distancia entre el votante y los partidos: cuanto más lejano esté el votante del partido que gobierna, menos utilidad recibe. La naturaleza espacial de esta relación permite introducir una función de utilidad en la que si x es la posición ideológica de un partido y x^* la posición ideológica ideal de un votante, entonces la utilidad es:

$$U(x) = -(x - x^*)^2$$

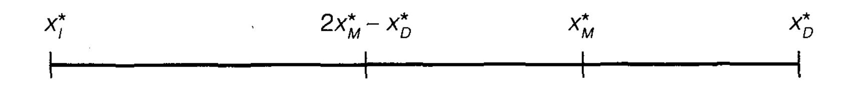
Cuando $x = x^*$, la función alcanza su máximo, tiene el valor 0. Conforme se agranda la distancia entre x^* y x, la utilidad va disminuyendo: de ahí que la función tenga signo negativo. La diferencia entre x^* y x la elevamos al cuadrado porque no nos interesa si la desviación se produce por la derecha o por la izquierda. Nótese que al ser una función cuadrática, estamos suponiendo que el votante es averso al riesgo.

En el caso más sencillo posible, el de un sistema bipartidista, si un partido gana es porque recibe más del 50% de los votos. Esto se puede expresar técnicamente: si llamamos votante mediano al votante que divide la distribución del electorado en dos partes de igual tamaño, dejando un 50% del electorado a cada lado, entonces un partido gana las elecciones cuando está más próximo al votante mediano que el partido rival. En el cuadro 1.4 se presenta un ejemplo. Sean x_I^*, x_D^* y x_M^* los puntos ideales de un partido de izquierdas, uno de derechas y el votante mediano, respectivamente. Es evidente que el partido D está más cerca del votante mediano M que el partido I. Por tanto,

D tiene la seguridad de que le va a votar la mitad a la derecha de *M*, que ya es el 50%, más algunos votantes a la izquierda de *M* que están más próximos a *D* que a *I*. Por tanto, *D* se asegura una cómoda victoria. Esto es una consecuencia directa de lo que se conoce como el teorema del votante mediano, en virtud del cual la opción ganadora en una votación entre dos opciones es la que esté más próxima a la primera preferencia o punto ideal del votante mediano.

CUADRO 1.4

POSICIONES ESPACIALES DE LOS PARTIDOS Y DEL VOTANTE MEDIANO



x_I^* = punto ideal de *I*, el partido de izquierdas.
x_M^* = punto ideal del votante mediano.
x_D^* = punto ideal de *D*, el partido de derechas.

La cuestión es: ¿le interesará a *I*, para ganar las próximas elecciones, desplazarse hacia el centro, situándose más próximo a *M* que *D*, suponiendo que *D* no se desplace por su parte? Para poder responder a esa cuestión, hay que conocer la función de utilidad de los partidos. Según Downs (1957), a los políticos sólo les interesa ganar elecciones, son meros maximizadores de votos. Para ellos, las políticas que se hacen desde el gobierno son un instrumento para ganar las elecciones, y no al revés. Si esto es cierto, la respuesta a la pregunta anterior es inmediata: a *I* siempre le interesa moverse hacia el votante mediano. De hecho, Downs consideró que en un sistema bipartidista los partidos deberían situarse en la misma posición, la del votante mediano, consiguiendo cada uno la mitad de los votos. El empate resultante habría que resolverlo lanzando una moneda al aire.

El modelo de Downs es poco realista. No es ya sólo que los partidos tengan posiciones distintas: es que además a veces el partido en la oposición permanece largo tiempo fuera del poder a causa de su resistencia a moderarse y desplazarse hacia el votante mediano. Así ocurrió por ejemplo con el partido laborista británico entre 1979 y 1997, o con la socialdemocracia alemana entre 1949 y 1959. Para dar cuenta de este fenómeno, se presenta una función de utilidad compleja donde los partidos no son maximizadores de votos (Sánchez-Cuenca 2004). Un partido valora dos cosas: por un lado, las políticas que esté haciendo el gobierno; por otro, el programa ideológico con el que se presentan en la sociedad. El partido tiene en cuenta tanto las políticas que se realizan desde el Gobierno como los principios ideológicos con los que se presenta ante la sociedad. Bajo ciertas condiciones, puede haber

un problema de compatibilidad entre estos dos objetivos. Puede suceder que al partido le preocupe que las políticas que haga el Gobierno no sean sus preferidas, pero no esté dispuesto a sacrificar sus principios ideológicos sin más por llegar al poder y hacer unas políticas que sean algo mejores que las que hacía el Gobierno anterior pero que están muy alejadas de su posición ideológica ideal. Para poder representar este *trade-off* o intercambio entre políticas y fidelidad a unos principios ideológicos, se introduce un coeficiente de rigidez ideológica, w, tal que $0 \leq w \leq 1$, que mide la importancia que se da a los principios ideológicos. Cuanto más alto w, más importancia tienen los principios ideológicos y menos la valoración de las políticas que hace el gobierno. Si $w = 0$, al partido sólo le interesan las políticas, no tiene rigidez ideológica; si $w = 1$, el partido es rígido y sólo le importa mantenerse fiel a sus principios.

Por simplicidad, suponemos que el partido que está en el gobierno es D y que D es inmóvil en el corto plazo, es decir, que el partido del gobierno no se desplaza en su posición ideológica. La pregunta es si I se desplazará. Nótese que I, si se desplaza, lo hace hasta una posición ganadora que exija el menor sacrificio ideológico posible. Como puede verse en el cuadro 1.4, lo lógico es que I se mueva hasta la posición $2x^*_M - x^*_D$, pues ahí se sitúa a igual distancia del votante mediano que D. Se supone también que en caso de igual distancia, M prefiere votar a un partido nuevo como I que a un partido que lleva tiempo en el gobierno como D. Lo que tenemos que comprobar es si para I la utilidad de no moderarse es mayor o no que la utilidad de moderarse hasta el punto $2x^*_M - x^*_D$. La utilidad de no moderarse, es decir, de mantenerse en su punto ideal, es ésta:

$$U_I(x^*_I, x^*_D) = -(w_I(x^*_I - x^*_I)^2 + (1 - w_I)(x^*_D - x^*_I)^2) = -(1 - w_I)(x^*_D - x^*_I)^2$$

La función de utilidad de I tiene dos argumentos, por un lado la fidelidad a los principios (la distancia entre lo que el partido anuncia en la campaña electoral y su posición ideal) y el valor de las políticas (la distancia entre las políticas que hace el Gobierno y las políticas que le gustaría hacer a I en su posición ideal). El primer argumento es x^*_I, puesto que I no se modera; el segundo es x^*_D, puesto que la política la hace D en su punto ideal. En cuestión de principios ideológicos, la función está en su máximo, ya que esa parte de la función vale 0; pero en cuestión de políticas, hay una utilidad negativa como consecuencia de la distancia entre x^*_D y x^*_I.

La otra opción es moderarse hasta el punto $2x^*_M - x^*_D$, ganar las elecciones y hacer unas políticas congruentes con esa posición pero sacrificando parte de sus principios ideológicos. Ahora las políticas son más aceptables, aunque a costa de haber renunciado a parte de los principios. La utilidad de esta segunda opción es:

$$U_I(2x^*_M - x^*_D, 2x^*_M - x^*_D) = -(w_I((2x^*_M - x^*_D) - x^*_I)^2 + (1 - w_I)((2x^*_M - x^*_D) - x^*_I)^2) =$$
$$= -((2x^*_M - x^*_D) - x^*_I)^2$$

El partido se moderará cuando la segunda utilidad sea mayor que la primera. Despejando con respecto al coeficiente de rigidez ideológica de I, w_I, la expresión resultante es:

$$w_I \leq \frac{4x^*_M(x^*_D - x^*_M)}{(x^*_D)^2} = w^*_I$$

Siempre que la rigidez ideológica de I sea menor que la cantidad crítica w^*_I, el partido se modera. Cuando esto no se cumple, al partido no le compensa moderarse. Lo interesante de esta expresión es que ahora podemos hacer "estática comparativa", es decir, podemos ver cómo afecta a la probabilidad de moderación cambios pequeños en cada uno de los parámetros del modelo. Esto permite formular hipótesis que luego puedan ser contrastadas empíricamente. Concretamente, de la expresión anterior se siguen varios resultados[2]: 1) cuanta mayor rigidez ideológica, menos probable es la moderación, 2) cuanto mayor sea la distancia entre el partido que se plantea la moderación y el votante mediano, menos probable es la moderación, y 3) cuanto mayor sea la distancia entre los dos partidos, más probable es la moderación.

[2] El lector interesado en entender la estática comparativa del modelo, puede consultar Sánchez-Cuenca (2004).

2

Juegos en forma normal o estratégica

Caracterización de un juego en forma normal

Comenzamos el recorrido por la teoría de juegos examinando la situación estratégica más simple posible, aquella en la que no se especifica la secuencia u orden de jugadas de los jugadores. Se supone que los jugadores hacen sus jugadas simultáneamente o, si se prefiere, que cada jugador hace sus elecciones sin conocimiento de las elecciones realizadas por los otros jugadores. Estos juegos habitualmente se pueden representar mediante una matriz de pagos y reciben el nombre de juegos en forma normal o juegos en forma estratégica. En el próximo capítulo se analizan los juegos en forma extensiva, en los cuales se detalla la secuencia temporal de jugadas. En un juego en forma normal tenemos varios jugadores o agentes cuyas acciones están interconectadas, en el sentido de que lo que cada uno haga depende de las expectativas que tenga sobre lo que van a hacer los demás, y cada uno actúa sin saber que han hecho los demás.

Podemos caracterizar formalmente un juego en forma normal a partir de los siguientes tres elementos (Morrow 1994: 69):

- Un conjunto de jugadores $i \in I$, $I = \{1, 2, ..., i, ..., I\}$.
- Un conjunto de estrategias S_i para cada jugador i.
- Funciones de utilidad (o funciones de pagos) Von Neumann-Morgenstern $U_i(S)$ para cada combinación $S = (S_1, ..., S_I)$ de estrategias.

Aunque nada impide que haya más de dos jugadores, en adelante nos limitamos al caso más simple de juegos de dos jugadores (por tanto, $I = 2$), lo que reduce los cálculos y razonamientos.

Una estrategia se define técnicamente como un plan completo de acción que especifica cómo comportarse durante el juego. En un juego en forma normal, puesto que las elecciones son en la práctica simultáneas, una estrategia coincide con el curso de acción que adopta el jugador. Como se verá en el siguiente capítulo, el concepto de estrategia es algo más rico cuando se aplica en juegos en forma extensiva.

En el cuadro 2.1 se observa un juego de dos jugadores (los jugadores J1 y J2) representado mediante una matriz de tres filas y tres columnas. Cada fila representa una de las tres posibles estrategias de J1 (*U*, *M* o *D*) y lo mismo sucede con las columnas con respecto a J2 (*l*, *m* o *r*). Cada jugador tiene por tanto tres estrategias distintas y ha de elegir una de ellas sin saber qué ha elegido el otro. Vamos a seguir la convención de representar las estrategias de J1 con letras mayúsculas y las estrategias de J2 con minúsculas.

CUADRO 2.1

JUEGO EN FORMA NORMAL

		J2		
		l	*m*	*r*
	U	4, 3	5, 1	6, 2
J1	*M*	2, 1	8, 4	3, 6
	D	3, 0	9, 6	3, 8

Los números que aparecen en el interior de las celdas son los pagos de los jugadores, medidos en utilidad Von Neumann-Morgenstern. El primer número en cada celda es el pago que recibe el jugador en filas, J1, y el segundo es el pago que recibe el jugador en columnas, J2. Los pagos son por tanto las consecuencias medidas en utilidad de las distintas combinaciones posibles de estrategias. Así, podríamos describir los pagos como se ilustra en estos ejemplos:

$$U_{J1}(M, m) = 8$$
$$U_{J2}(M, m) = 4$$
etc.

A pesar de que en la definición anterior se establece que los pagos del juego se miden como utilidades Von Neumann-Morgenstern, y por consiguiente como utilidades cardinales, en ciertos contextos simples los pagos pueden ser interpretados ordinalmente, reflejando tan sólo el orden de preferencia sobre las distintas combinaciones de estrategias posibles. Sin embargo, es conveniente ceñirse al supuesto de cardinalidad, pues sólo así cabe calcular estrategias mixtas en el juego, según se explica más adelante.

Criterios de dominación

Hay algunos juegos en los que la configuración de pagos es de tal naturaleza que la propia condición estratégica del juego prácticamente se disuelve. Antes se ha visto que la característica de los juegos es que representan situaciones estratégicas, es decir, situaciones en las que la acción de cada uno depende de las expectativas que tenga sobre lo que los demás van a hacer. Pero excepcionalmente dicha dependencia puede neutralizarse, de forma que un jugador tenga buenas razones para elegir una estrategia frente a otra *al margen de* lo que vaya a hacer el otro jugador. Aunque formalmente nos encontremos en un contexto estratégico, pues las consecuencias de mis acciones dependen de lo que los demás hagan, en realidad la elección del jugador es paramétrica, pues el jugador elige sin tener en consideración qué estrategia va a elegir su contrincante. Esto sólo es posible cuando al elegir una cierta estrategia siempre estoy mejor jugando esa estrategia que si elijo otra, independientemente de la estrategia que elija el otro jugador. Cuando el juego se puede jugar, digámoslo así, "paramétricamente", su resolución es más bien trivial.

Sea el juego del cuadro 2.2, J1 puede realizar el siguiente razonamiento: haga lo que haga J2, siempre estoy mejor eligiendo la estrategia *D* que la estrategia *U*. Si J2 elige *l*, entonces, si yo hago *U*, obtengo –1, pero si hago *D* obtengo 0; si J2 elige *r*, entonces, si hago *U*, obtengo 2, mientras que si hago *D* obtengo 3. Puesto que 0 es mejor que –1 y 3 es mejor que 2, haga lo que haga J2 me compensa siempre elegir *D*. Por tanto, decimos que para J1 la estrategia *D* domina a la estrategia *U*. J1, a la hora de elegir su estrategia, no tiene en cuenta qué pueda hacer J2, puesto que haga lo que haga J2, J1 está mejor con *D* que con *U*. En cambio, J2 no tiene ninguna estrategia dominante: *l* le proporciona un pago más alto que *r* si J1 elige *U*, pero si J1 elige *D*, entonces *r* produce un pago mejor que *l*.

CUADRO 2.2

EJEMPLO DE JUEGO CON DOMINACIÓN

		J2	
		l	*r*
J1	*U*	–1, 3	2, 1
	D	0, 2	3, 4

En este juego, aunque J2 no tiene una estrategia *incondicionalmente* mejor, sabe, por medio del análisis del juego, que J1 siempre va a elegir *D* habida cuenta

de que *D* domina a *U*. Por tanto, está seguro que J1 va a elegir *D* si supone que J1 es racional. Sabiendo esto, la elección de J2 también se vuelve "paramétrica", en el sentido de que se limita a elegir entre los pagos de 2 (si hace *l*) y 4 (si hace *r*). Como 4 es mejor que 2, elegirá *r*. J1 jugará *D*, J2 jugará *r*, y los pagos para cada uno serán 3 y 4 respectivamente. Hemos podido resolver el juego gracias a que la elección de cada jugador era en última instancia paramétrica. Si los jugadores son racionales, la predicción es que jugarán las estrategias (*D*, *r*).

Ahora podemos definir con un poco más de precisión qué quiere decir que una estrategia domine a otra. Hay que distinguir dos tipos de dominación, fuerte y débil. Comenzamos por la definición de la dominación fuerte tomando como referencia en la notación a J1, aunque esto, obviamente, es irrelevante. Una estrategia S_1 domina fuertemente a otra S_2 si y sólo si

$$U_{J1}(S_1, s_j) > U_{J1}(S_2, s_j), \quad \forall s_j$$

Dada cualquier estrategia de J2, S_1 domina fuertemente a S_2 si S_1 siempre produce más utilidad que S_2. En el juego del cuadro 2.2, *D* domina fuertemente a *U* porque:

$$U_{J1}(D, l) > U_{J1}(U, l) \quad \text{y} \quad U_{J1}(D, r) > U_{J1}(U, r)$$

La definición de dominación débil es algo menos exigente. Una estrategia S_1 domina débilmente a otra S_2 si y sólo si:

$$U_{J1}(S_1, s_j) \geq U_{J1}(S_2, s_j), \quad \forall s_j$$

y

$$U_{J1}(S_1, s_j) > U_{J1}(S_2, s_j) \quad \text{para al menos una } s_j$$

S_1 domina débilmente a S_2 si en todos los casos S_1 proporciona al menos tanta utilidad como S_2 y en al menos un caso S_1 proporciona más utilidad que S_2. De otra forma, una estrategia domina débilmente a otra si ambas proporcionan la misma utilidad dadas las estrategias del otro jugador pero al menos para una estrategia del otro jugador sucede que la primera estrategia es estrictamente mejor que la segunda. En el juego del cuadro 2.1, puede comprobarse que *D* domina débilmente a *M*, pues cuando J2 juega *r*, *D* y *M* proporcionan exactamente la misma utilidad, pero cuando J2 juega *l* o *m*, *D* es mejor que *M*.

Cuando en un juego nos encontramos con estrategias dominadas, ya sea fuerte o débilmente, podemos eliminarlas, puesto que un jugador racional nunca tendrá buenas razones para elegir estrategias dominadas. A veces podemos llegar a una solución única del juego mediante este procedimiento de eliminación sucesiva de estrategias dominadas. Vamos a ver cómo funciona este procedimiento en el caso del juego del cuadro 2.1. Es fácil darse cuenta de que *r* domina fuertemente a *m*. Por tanto, podemos

eliminar *m* y observar qué sucede en el juego resultante, que se representa en el cuadro 2.3.

CUADRO 2.3

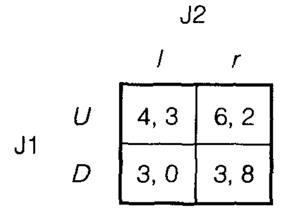
EL JUEGO DEL CUADRO 2.1 TRAS HABER ELIMINADO *m*

		J2 *l*	J2 *r*
J1	*U*	4, 3	6, 2
J1	*M*	2, 1	3, 6
J1	*D*	3, 0	3, 8

Una vez eliminado *m*, es evidente que ahora la estrategia *U* domina fuertemente a la estrategia *M*. Por tanto, eliminamos *M*, con la seguridad de que si J1 es racional, nunca juega *M*. El juego así modificado aparece en el cuadro 2.4.

CUADRO 2.4

EL JUEGO DEL CUADRO 2.1 TRAS HABER ELIMINADO *m* Y *M*

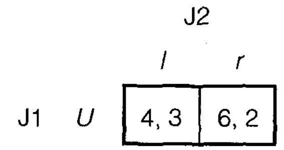


		J2 *l*	J2 *r*
J1	*U*	4, 3	6, 2
J1	*D*	3, 0	3, 8

En este juego reducido, todavía es posible ir más lejos. Ahora cabe eliminar *D*, ya que *U* domina fuertemente a *D*. El resultado aparece en el cuadro 2.5.

CUADRO 2.5

EL JUEGO DEL CUADRO 2.1 TRAS HABER ELIMINADO *m*, *M* Y *D*



		J2 *l*	J2 *r*
J1	*U*	4, 3	6, 2

Llegados a este punto, la resolución del juego es trivial: dadas las dos estrategias de J2, salta a la vista inmediatamente que *l* domina fuertemente a *r*, por lo que el resultado final o solución del juego es la combinación de estrategias *(U, l)*, con pagos de 4 para J1 y 3 para J2.

Cuando en un juego hay varias estrategias dominadas, se llega al mismo resultado final independientemente de por dónde comencemos el proceso de eliminación. A este proceso de búsqueda por eliminación de estrategias dominadas de la solución del juego se le llama "dominación repetida" *(iterated domination)*. Se trata de un proceso mecánico, que funciona únicamente porque el juego, cuando hay estrategias dominadas, puede llegar a perder su condición estratégica y transformarse en un problema de elección paramétrica. No todos los juegos se pueden resolver así.

A pesar de que este proceso de "dominación repetida" pueda parecer completamente lógico, los expertos en teoría de juegos han ideado ejemplos en los que este método da lugar a resultados dudosos. Veamos uno de esos ejemplos. Sea el juego del cuadro 2.6.

CUADRO 2.6

UN JUEGO DONDE EL CRITERIO DE DOMINACIÓN RESULTA DUDOSO

		J2: *l*	J2: *r*
J1	*U*	8, 10	–100, 9
	D	7, 6	6, 5

En principio, uno puede considerar que la manera en que se jugará este juego es ésta: la columna *l* domina fuertemente a la columna *r*; J1, sabiendo esto, ha de elegir entre *U*, que le proporciona 8 si J2 juega *l*, y *D*, que le proporciona 7 si J2 juega *l*. Evidentemente, *U* domina fuertemente a *D*, luego J1 juega *U*. La solución del juego por dominación repetida es (*U*, *l*), con pagos (8, 10). Ahora bien, esta forma de analizar el juego presupone que J1 está completamente seguro de la racionalidad de J2, de modo que J2 nunca va a elegir *r* frente a *l*. Justo porque hay esta certeza, el juego se puede resolver mecánicamente, mediante dominación repetida. La decisión de J1 es como una decisión paramétrica, es decir, J1 considera que la estrategia de J2 no es más que un parámetro del ambiente. Sin embargo, este planteamiento no es del todo realista, pues nunca estamos seguros del todo de la racionalidad de las personas, siempre albergamos alguna pequeña duda de que el rival no sea racional. En ese caso, si J1 elige *U*, corre un riesgo de acabar con –100 si J2 no actúa racionalmente, mientras que si juega *D* o bien saca 7 o bien saca 6.

De ahí que no todo el mundo esté de acuerdo con que la solución obvia del juego sea (*U*, *l*). Supongamos que la creencia de J1 acerca de J2 es que hay una probabilidad del 98% de que J2 sea racional, y una del 2% de que sea irracional (podemos considerar que la racionalidad de J2 es un estado del mundo). Si J2 es racional, siempre juega *l*, mientras que si es irracional, siempre juega *r*. Desde el punto de vista de la utilidad esperada, J1 estaría en tal caso mejor eligiendo *D* que *U*:

$$UE_{J1}(U) = 0{,}98*8 + 0{,}02*(-100) = 5{,}84$$

$$UE_{J1}(D) = 0{,}98*7 + 0{,}02*6 = 6{,}98$$

Con un margen tan pequeño de incertidumbre, deja de ser cierto en este juego que *U* sea la mejor estrategia posible para J1. La solución basada en la dominación repetida tiene sentido cuando la incertidumbre desaparece completamente. Pero el supuesto de seguridad absoluta no es demasiado realista, a no ser que J2 sea un ordenador programado para maximizar utilidad. En la medida en que nuestra concepción de las personas sea algo más compleja que un ordenador que maximiza utilidad, la solución por dominación repetida no es en todos los juegos la forma más razonable de jugarlos.

Equilibrio de Nash

Más allá de las limitaciones que se acaban de señalar acerca del procedimiento de dominación repetida, este procedimiento es en todo caso de aplicación restringida, ya que en muchos juegos no hay dominación (fuerte o débil) de estrategias. Cuando así ocurre, ¿cómo se juega el juego? ¿Qué cuenta como una solución razonable? La respuesta a estas cuestiones se debe al matemático John Nash (1996), quien en 1951 publicó un artículo fundamental en el que generaliza la idea de equilibrio que habían propuesto los fundadores de la teoría de juegos, Von Neumann y Morgenstern, para un ámbito muy concreto, los juegos de suma cero. Aquí no se explica nada sobre los juegos de suma cero, puesto que rara vez se encuentran en la realidad situaciones en las que las ganancias de un jugador sean exactamente las pérdidas del otro, y viceversa. Nash define su noción de equilibrio a partir de la idea de "respuesta óptima" o "mejor respuesta posible" *(best reply)*. Una respuesta óptima se define como aquella estrategia que proporciona resultados mejores que todas las demás estrategias posibles frente a una estrategia dada del rival. Si representamos mediante *S* el conjunto de estrategias de J1 sin incluir una estrategia concreta S_i, podemos decir que S_i es una respuesta óptima cuando:

$$U_{J1}(S_i, s_j) \geq U_{J1}(S, s_j)$$

S_i es la mejor respuesta posible de J1 a la estrategia s_j de J2 cuando S_i proporciona más utilidad a J1 que cualquier otra estrategia.

Pues bien, un equilibrio de Nash se define como una combinación de estrategias en la que cada estrategia es una respuesta óptima a la otra. Dado que todos los jugadores utilizan sus respuestas óptimas, ninguno tiene razón alguna para cambiar de estrategia: si un jugador utiliza una estrategia que no sea una respuesta óptima, pierde utilidad. Puesto que los jugadores no tienen razones para cambiar de estrategia, dicha combinación de estrategias se dice que está en equilibrio, es decir, que es estable. Formalmente, un par de estrategias (S_i, s_j) es un equilibrio de Nash cuando se cumple la doble condición de que S_i sea la respuesta óptima a s_j y de que s_j sea la respuesta óptima a S_i:

$$U_{J1}(S_i, s_j) \geq U_{J1}(S, s_j)$$
$$U_{J2}(S_i, s_j) \geq U_{J2}(S_i, s)$$

Al analizar un juego en forma normal, buscamos todas las combinaciones de estrategias que constituyan equilibrios de Nash. Hay juegos con un único equilibrio de Nash, con equilibrios múltiples de Nash, y sin equilibrio de Nash (aunque, como se explica en la próxima sección, siempre hay al menos un equilibrio de Nash con estrategias mixtas). Veamos un par de ejemplos.

En el juego del cuadro 2.7 J1 tiene tres estrategias y J2 dos. Esto da lugar a seis resultados posibles. ¿Cómo podemos determinar cuáles de esos resultados representan una combinación de estrategias que sea un equilibrio de Nash? Hay que comprobar si las estrategias son simultáneamente respuestas óptimas. Comencemos por el primer par, (S_1, s_1). ¿Es s_1 una respuesta óptima a S_1? La respuesta es afirmativa, pues si J1 juega S_1, J2 no puede mejorar cambiando de s_1 a s_2, luego, según la anterior definición, se cumple la condición de respuesta óptima. Sin embargo, S_1 no es la respuesta óptima a s_1, ya que J1 puede estar mejor cambiando a S_2. Por tanto, (S_1, s_1) no puede ser un

CUADRO 2.7

JUEGO EN FORMA NORMAL

		J2	
		s_1	s_2
	S_1	1, 1	1, 1
J1	S_2	2, −1	−10, −2
	S_3	−1, −2	0, −1

equilibrio de Nash. Continuemos con el proceso de búsqueda del equilibrio. Consideremos ahora el par (S_1, s_2). De nuevo, se cumple que s_2 es la mejor respuesta a S_1. Pero ahora, además, es el caso que S_1 es la respuesta óptima a s_2. Por tanto, el par (S_1, s_2) sí que es un equilibrio de Nash. Nótese que lo relevante no son los pagos, pues los pagos son idénticos en estos dos primeros casos, sino que lo que importa es el criterio de respuesta óptima.

El análisis no acaba aquí. Hay que seguir calculando respuestas óptimas hasta agotar todas las combinaciones de estrategias posibles. ¿Es (S_2, s_1) un equilibrio de Nash? Por lo pronto, S_2 es la mejor respuesta posible a s_1, según hemos visto antes. Y s_1 es a su vez la respuesta óptima a S_2, pues aunque le dé utilidad negativa a J2, J2 está mejor jugando s_1 que s_2 contra S_2. Hemos identificado por tanto un segundo equilibrio de Nash dentro de este juego. ¿Es (S_2, s_2) un equilibrio de Nash? Evidentemente no, pues acabamos de decir que la mejor respuesta de J2 a S_2 es s_1, no s_2. ¿Y (S_3, s_1)? Tampoco, ya que la respuesta óptima de J1 a s_1 es S_2, no S_3. Por último, ¿es (S_3, s_2) un equilibrio de Nash? No, porque sabemos por razonamientos anteriores que la respuesta óptima a s_2 es S_1 y no S_3. En suma, el juego del cuadro 2.7 tiene dos equilibrios de Nash, (S_1, s_2) y (S_2, s_1).

Este mismo proceso de búsqueda se aplica a cualquier otro juego en forma normal, ya tenga uno, múltiples o ningún equilibrio de Nash. Es interesante el caso de juegos sin equilibrio de Nash, como el que aparece en el cuadro 2.8. La respuesta óptima de J2 a S_1 es s_2, la respuesta óptima de J1 a s_2 es S_2, la respuesta óptima de J2 a S_2 es s_1, la respuesta óptima de J1 a s_1 es S_1 y... vuelta a empezar. No hay una combinación de estrategias que sean respuestas óptimas a la vez.

La ausencia de equilibrios de Nash se produce cuando no hay estrategias dominadas para ninguno de los dos jugadores. Es claro que la teoría de juegos no puede contentarse con constatar la ausencia de equilibrio, pues eso supondría reconocer que la teoría es incapaz de predecir cómo actuarán los agentes racionales en algunos juegos. La teoría de juegos tiene el compromiso de determinar en todo juego posible qué cuenta como elección racional. Para poder resolver el problema de los juegos sin equilibrio, Nash demuestra

CUADRO 2.8

UN EJEMPLO SIN EQUILIBRIO DE NASH

		J2	
		s_1	s_2
J1	S_1	1, 1	0, 4
	S_2	–1, 3	3, –5

que en realidad todo juego siempre tiene al menos un equilibrio de Nash si se admiten estrategias mixtas en el juego. En la próxima sección se explica qué es una estrategia mixta y cómo se puede interpretar.

Equilibrio de Nash con estrategias mixtas

La idea de estrategia mixta no es demasiado clara. Resulta más fácil aprender a manejar estrategias mixtas que entender realmente qué son éstas. Por eso, primero se va a exponer la parte técnica, sobre definiciones y operaciones, y el propio uso de las estrategias mixtas facilitará la tarea de explicar después su naturaleza y significado. Vamos a ver que el formalismo de las estrategias mixtas consiente interpretaciones sustantivas bastante diferentes entre sí.

Una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras. Las estrategias puras son las estrategias contempladas hasta el momento, es decir, estrategias que consisten en elegir un cierto curso de acción. Las estrategias mixtas incluyen cursos de acción diversos (varias estrategias puras), cada una con una probabilidad determinada. En cuanto una estrategia mixta es una combinación probabilística de estrategias puras, puede decirse que las estrategias mixtas *expanden* el conjunto de estrategias entre las que puede elegir el agente. Gracias a ese aumento del conjunto de estrategias posibles, se pueden encontrar equilibrios de Nash en todos los juegos, incluso en los que no tienen equilibrios al analizarlos únicamente con estrategias puras.

Comencemos por un juego muy simple, el juego de pares o nones. Cada jugador saca con una mano tantos dedos como quiera, de 1 a 5, y luego se suman. Un jugador gana cuando la suma de los dedos de los dos jugadores es par y el otro gana cuando dicha suma es impar. Supongamos que el jugador en filas gana si la suma de dedos es par y pierde si es impar, y al revés para el jugador en columnas. Saldrá un número par cuando los dos saquen cantidades pares o los dos saquen cantidades impares; y saldrá impar cuando uno saque pares y el otro nones.

CUADRO 2.9

EL JUEGO DE PARES Y NONES

		J2 *(nones)*	
		Pares	*Nones*
J1 *(pares)*	*Pares*	1, –1	–1, 1
	Nones	–1, 1	1, –1

Este juego no tiene un equilibrio de Nash con estrategias puras, siendo éstas o bien sacar un número par de dedos o bien sacar un número impar. Si J1 espera que J2 vaya a sacar pares, J1 saca pares, pero en tal caso J2 prefiere sacar nones, y así sucesivamente. Para salir del embrollo, podemos considerar qué sucede si ampliamos el abanico de estrategias con estrategias mixtas, es decir, que cada jugador elija una combinación de estrategias puras por la cual elige con cierta probabilidad sacar pares y con el resto de probabilidad sacar nones. Antes de entrar a examinar la cuestión de cómo se establecen esas probabilidades, vamos a ver cómo operan en la práctica. Supongamos que J1 juega pares la mitad de las veces y nones la otra mitad o, si se prefiere, que J1 elige pares con una probabilidad de 0,5 y nones con una probabilidad también de 0,5. En ese caso, ¿qué pagos puede esperar J2 con sus estrategias puras? ¿Qué resultados sacará J2 jugando frente a la estrategia mixta de J1? Si J2 juega pares, los pagos esperados para J2 dada la estrategia mixta de J1 serán:

$$UE_{J2}(pares) = \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1) = 0$$

Es decir, si J1 juega pares y J2 juega pares, el resultado será pares (–1 de utilidad para J2) y si J1 juega impares y J2 juega pares, el resultado será impares (1 de utilidad para J2). Pero J2 no sabe qué va a hacer realmente J1, sólo sabe que va a jugar con probabilidad 1/2 cada estrategia. Por tanto, los resultados esperados hay que ponderarlos por las probabilidades correspondientes. La utilidad esperada es, como se ve en la fórmula, 0. Si J2 juega impares, los pagos esperados de J2 dada la estrategia mixta de J1 son:

$$UE_{J2}(impares) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) = 0$$

De nuevo, la utilidad esperada es 0. Luego si J1 juega su estrategia mixta, entonces haga J2 lo que haga, J2 siempre saca 0. Pero si la elección de las estrategias puras de J2 no introduce ningún cambio en el resultado final, eso significa que *J2 es indiferente entre sus estrategias puras como consecuencia de la estrategia mixta de J1*.

El propósito de las estrategias mixtas consiste precisamente en neutralizar la elección de estrategias puras del rival. El jugador que utiliza una estrategia mixta de equilibrio consigue que el rival sea indiferente entre sus estrategias puras. Ahora bien, si los dos jugadores hacen esto, es decir, si los dos jugadores juegan estrategias mixtas que neutralicen la elección de estrategias puras del rival, entonces ninguno de los dos jugadores tiene incentivo alguno para dejar de jugar su estrategia mixta y, por tanto, nos encontraremos en una situación de equilibrio de Nash, donde cada estrategia mixta es la respuesta óptima a la otra estrategia mixta. Este argumento merece un análisis algo más detallado.

En el ejemplo de pares y nones, el juego es simétrico. Por tanto, si la estrategia mixta de equilibrio consiste para J1 en jugar pares con probabilidad 1/2 y jugar nones con probabilidad 1/2, la estrategia mixta de J2 ha de ser idéntica (todavía no sabemos, sin embargo, cómo se llega a una estrategia mixta de equilibrio). Se puede demostrar que si J1 juega su estrategia mixta, cualquier estrategia (pura o mixta) de J2 es una respuesta óptima a la estrategia mixta de J1. Ya hemos visto que cualquier estrategia pura de J2 le proporciona un pago esperado de 0. Tan sólo queda por confirmar que la estrategia mixta de J2 frente a la estrategia mixta de J1 también le da 0 a J2:

$$UE_{J2}\left(\frac{1}{2}\,pares,\ \frac{1}{2}\,nones\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1)\right] = 0$$

Las probabilidades de 1/2 que aparecen por delante de los corchetes se refieren a las probabilidades de que J2 elija pares o nones, mientras que las probabilidades de 1/2 que aparecen dentro de los corchetes corresponden a la estrategia mixta de J1. En cualquier caso, el resultado vuelve a ser 0, lo cual demuestra que la estrategia mixta de J2 también es una respuesta óptima de J2 a la estrategia mixta de J1. Sabiendo que cualquier estrategia de J2 es una respuesta óptima a la estrategia mixta de J1, ¿es un equilibrio de Nash que J1 juegue su estrategia mixta y J2 elija como respuesta óptima la estrategia pura "pares"? La respuesta es negativa. Si J1 está seguro de que J2 va a elegir pares, entonces J1 está mejor si él mismo elige pares que si juega su estrategia mixta. Luego la combinación de estrategias de ambos jugadores ((1/2Pares, 1/2Nones), pares) no es un equilibrio de Nash. Lo mismo cabe decir con respecto a ((1/2Pares, 1/2Nones), nones): tampoco es un equilibrio de Nash, porque la mejor respuesta posible de J1 a nones no es su estrategia mixta, sino nones. En cambio, la combinación de estrategias ((1/2Pares, 1/2Nones), (1/2pares, 1/2nones)) sí que es un equilibrio de Nash, puesto que ninguno de los dos jugadores tiene incentivos para cambiar de estrategia. Nótese cierta circularidad en el argumento: J2 puede recurrir en equilibrio a una estrategia mixta porque J1 está, con su estrategia mixta, haciendo indiferente a J2 entre sus estrategias puras y, a su vez, J1 puede utilizar en equilibrio su estrategia mixta porque J2, con su estrategia mixta, está haciendo a J1 indiferente entre sus estrategias puras. Ante una estrategia mixta, cualquier estrategia posible (pura o mixta) es una respuesta óptima. Pero una estrategia mixta sólo es una respuesta óptima frente a otra estrategia mixta. Por tanto, el equilibrio de Nash con estrategias mixtas sólo se produce cuando los dos utilizan sus estrategias mixtas.

Ya sabemos qué sucede cuando los agentes utilizan estrategias mixtas de equilibrio, pero no entendemos todavía cómo se calculan dichas estrategias mixtas. ¿Cómo los agentes racionales consiguen determinar la probabilidad correcta con la que mezclar sus estrategias puras? La respuesta está implícita

en lo que hemos visto hasta el momento: la probabilidad apropiada es aquella que hace indiferente al rival entre sus estrategias puras. Veámoslo a través de un ejemplo.

Sea el juego del cuadro 2.8, que como se vio en su momento no tenía equilibrio de Nash con estrategias puras. J1 calcula las probabilidades de jugar S_1 o S_2 tratando de hacer indiferente a J2 entre s_1 y s_2. Por tanto, para calcular su estrategia mixta, se basará en los pagos de J2. Sea p la probabilidad de que J1 elija S_1 y 1- p la probabilidad de que elija S_2. J2 es indiferente entre sus estrategias cuando espera obtener la misma utilidad con cada una. Podemos igualar ambas utilidades forzando un valor único de p:

$$UE_{J2}(s_1) = p1 + (1-p)3 = UE_{J2}(s_2) = p4 + (1-p)(-5)$$

Si despejamos p en la anterior ecuación, obtenemos $p = 8/11$. Si J1 elige S_1 con probabilidad 8/11 y S_2 con probabilidad 3/11, J2 es necesariamente indiferente entre s_1 y s_2. Por su parte, J2, jugando con los pagos de J1, construye una relación de indiferencia para J1 entre sus estrategias puras. Si q es la probabilidad de que J2 elija s_1, entonces J2 hace indiferente a J1 cuando:

$$UE_{J1}(S_1) = q1 + (1-q)0 = UE_{J1}(S_2) = q(-1) + (1-q)3$$

Despejando q en la ecuación, obtenemos $q = 3/5$. Si J2 elige s_1 con probabilidad $q = 3/5$, entonces J1 es indiferente entre sus estrategias mixtas.

Ahora podemos unir las dos estrategias mixtas así calculadas y establecer el siguiente equilibrio de Nash: ((8/11S_1, 3/11S_2), (3/5s_1, 2/5 s_2)). El equilibrio se produce porque cada estrategia mixta es la mejor respuesta posible a la otra. Es fácil darse cuenta de que si variamos una de las dos probabilidades, el equilibrio con estrategias mixtas se desmorona. Por ejemplo, si J2 jugase s_1 con probabilidad 4/5 en lugar de 2/5, la respuesta óptima a esta estrategia mixta de J2 no sería la estrategia mixta de J1, sino que J1 elija S_1 como estrategia pura. Si s_1 = 4/5, entonces los pagos esperados por J1 de sus estrategias puras y mixtas serían:

$$UE_{J1}(S_1) = \frac{4}{5}(1) + \frac{1}{5}(0) = 0{,}8$$

$$UE_{J1}(S_2) = \frac{4}{5}(-1) + \frac{1}{5}(3) = -0{,}2$$

$$UE_{J1}\left(\frac{8}{11}S_1, \frac{3}{11}S_2\right) = \frac{8}{11}\left[\frac{4}{5}(1) + \frac{1}{5}(0)\right] + \frac{3}{11}\left[\frac{4}{5}(-1) + \frac{1}{5}(3)\right] = 0{,}53$$

La estrategia que mayor utilidad proporciona a J1 frente a la estrategia mixta de J2 es S_1, luego dicha estrategia mixta no puede ser parte de un equi-

librio de Nash. El equilibrio de Nash con estrategias mixtas sólo se produce si cada estrategia mixta es la respuesta óptima a la otra estrategia mixta.

Nash demostró que todo juego en forma normal tiene *siempre* al menos un equilibrio de Nash si se considera la posibilidad de estrategias mixtas. Este resultado tiene gran importancia, pues implica que la teoría de juegos puede determinar al menos una forma racional de resolver cualquier juego. No hay juegos que escapen al ámbito de la racionalidad.

Los equilibrios con estrategias mixtas tienen ciertas peculiaridades interesantes. Como ha señalado George Tsebelis (1989), las probabilidades que intervienen en el cálculo de una estrategia mixta son de naturaleza diferente a las probabilidades que aparecen en una decisión paramétrica en un contexto de incertidumbre. En una decisión paramétrica, la probabilidad de ocurrencia de los estados del mundo es exógena, está dada y no depende de lo que haga la persona. En un contexto estratégico, la probabilidad de que se recurra a una u otra estrategia es endógena, depende de la configuración de pagos en el juego. En un contexto paramétrico, los cambios en los pagos de utilidad asociados a las distintas elecciones posibles cambiarán la acción que cuenta como mejor elección posible, puesto que las probabilidades se mantienen constantes. Pero en el contexto de las estrategias mixtas, un cambio en mis pagos no afecta a mi estrategia, sino que sólo afecta a las probabilidades de la estrategia mixta de mi rival, puesto que mi estrategia mixta se calcula con relación a los pagos de mi rival, mientras que la estrategia mixta de mi rival se calcula con relación a mis propios pagos. Esto da lugar a algunas consecuencias curiosas.

Sea un juego genérico entre dos actores colectivos, los conductores por un lado y la policía por el otro. Los conductores pueden decidir respetar las normas de tráfico o no respetarlas; la policía puede decidir vigilar o no vigilar a los conductores. Tsebelis presenta el juego según aparece en el cuadro 2.10:

CUADRO 2.10

EL JUEGO DE TSEBELIS ENTRE POLICÍAS Y CONDUCTORES

		Policía	
		Vigilar	*No vigilar*
Conductores	*No respetar las normas*	a_1, a_2	b_1, b_2
	Respetar las normas	c_1, c_2	d_1, d_2

$c_1 > a_1$ y $b_1 > d_1$

$a_2 > b_2$ y $d_2 > c_2$

Dada la relación de pagos que aparece debajo del juego del cuadro 2.10, no hay un equilibrio de Nash con estrategias puras. Sin embargo, sí hay un equilibrio con estrategias mixtas. Los conductores, para calcular su estrategia mixta, utilizan los pagos de la policía; y la policía, para calcular su estrategia mixta, utiliza los pagos de los conductores. Pero de aquí se sigue que si, por ejemplo, se modifican los pagos de los conductores, lo que se altera no es el comportamiento de los conductores, sino el comportamiento de la policía, puesto que la estrategia mixta de la policía depende de los pagos de los conductores habida cuenta de que el objetivo de la policía es hacer indiferente a los conductores entre respetar o no respetar las normas. Por ejemplo, si el pago a_1 se hace más pequeño, proporciona menos utilidad (si el coste de no respetar las normas aumenta, por ejemplo porque aumentan las multas), la consecuencia no es que los conductores respeten más las normas, sino que la policía vigile menos a los conductores. Lo curioso de las estrategias mixtas es que los cambios en los pagos de un jugador alteran no la estrategia del propio jugador, sino la estrategia del rival. Esto es consecuencia de que en el contexto estratégico las probabilidades sean endógenas y no exógenas.

En principio, la idea de estrategia mixta parece suponer que los agentes toman decisiones mediante algún mecanismo aleatorio. Por ejemplo, si la estrategia mixta es elegir una estrategia pura con probabilidad 1/2 y la otra con el restante 1/2, basta con echar una moneda al aire. Esto puede parecer poco realista, ya que casi nunca tomamos las decisiones probabilísticamente, sobre todo cuando lo que se ventila es algo importante. No obstante, hay algunos casos en los que la interpretación literal de la estrategia mixta sí que tiene sentido: como cuando el Ministerio de Hacienda realiza probabilísticamente inspecciones fiscales en el juego entre el Ministerio y los ciudadanos, o cuando se realizan controles aleatorios de sustancias prohibidas a los deportistas. ¿Pero qué sucede cuando no hay lugar para un mecanismo real de aleatorización? ¿Significa eso que las estrategias mixtas no son más que un artificio matemático para garantizar la existencia de equilibrios de Nash en todos los juegos posibles?

Aunque las interpretaciones posibles de la idea de estrategia mixta son complejas y corresponden a un curso avanzado de teoría de juegos (véase, por ejemplo, Osborne y Rubinstein 1994: 37-44), algo se puede apuntar en este estadio. Por ejemplo, desde una interpretación no racional, las probabilidades de una estrategia mixta pueden entenderse simplemente como las frecuencias con las que en el pasado se han elegido las estrategias puras. Así, las estrategias mixtas no serían más que regularidades estocásticas. Cuando la teoría de juegos se aplica en biología, a veces se considera que la estrategia mixta que utiliza una especie (el 30% de las veces los miembros de una especie eligen una estrategia pura, el 70% restante eligen la otra estrategia pura) responde a un caso de "polimorfismo" (Maynard Smith 1982: 16): un 30% de los miembros de la especie tienen una característica que les hace elegir una estrategia pura, mientras que el 70% restante tiene otra característica

que les hace escoger la otra estrategia pura. En esas circunstancias, un animal de otra especie sabe que al jugar con un miembro de esta especie se enfrenta a una estrategia mixta 0,3; 0,7.

La interpretación más interesante no obliga a abandonar el supuesto de racionalidad, aunque exige considerar que no hay información completa en el juego. La idea consiste en que J1 no está del todo seguro acerca de la naturaleza de los pagos de J2. Si los pagos de J2 tienen ciertas características, entonces J2 actúa de una forma; si tienen otras, actúa de otra forma. Por supuesto, J2 conoce sus pagos y elige una estrategia pura. Pero para J1, que no tiene toda la información necesaria sobre los auténticos pagos de J2, la elección de una estrategia pura por parte de J2 se le presenta como una estrategia mixta, como una estrategia probabilística, pues con cierta probabilidad los pagos serán unos con su correspondiente estrategia pura, y con el resto de probabilidad los pagos serán otros y J2 elegirá otra estrategia pura. Aquí la idea de estrategia mixta se traduce a incertidumbre por parte de un jugador acerca de los verdaderos pagos de su rival. Del mismo modo, puede considerarse que la elección de una u otra estrategia pura depende de información privada relevante que sólo conoce el jugador, pero no su rival. Aunque el jugador juegue eligiendo estrategias puras, su rival, por carecer de esa información privada, actuará como si se enfrentara a una estrategia mixta.

Supongamos, con respecto al juego del cuadro 2.8 en el que se han calculado las estrategias mixtas, que en realidad no hay información completa. J1 no está seguro de cuál de los dos juegos que aparecen en el cuadro 2.11 está jugando. En el primero, J2 tiene una estrategia pura dominante, elegir la

CUADRO 2.11

DESDOBLAMIENTO DEL JUEGO DEL CUADRO 2.8

		J2: s_1	J2: s_2
J1	S_1	1, 5	0, 4
	S_2	–1, 3	3, –5

		J2: s_1	J2: s_2
J1	S_1	1, 1	0, 4
	S_2	–1, 3	3, 5

primera columna; en el segundo, la estrategia dominante es elegir la segunda columna.

• Si la creencia de J1 de estar jugando el primer juego es de 3/5 y la de estar jugando el segundo de 2/5, entonces J1, aunque sepa que J2 elige en cada caso una estrategia pura, en la práctica se está enfrentando a una estrategia mixta que le hace indiferente entre sus propias estrategias puras. No es necesario por tanto considerar que una estrategia mixta implica un mecanismo real de aleatorización: puede ser también un reflejo de una incertidumbre subyacente que no se refleje explícitamente en el juego. De esta forma se consigue una interpretación más plausible de estas estrategias.

La interpretación del equilibrio de Nash

Una vez visto que todo juego en formal normal tiene al menos un equilibrio de Nash si se admiten estrategias mixtas, conviene profundizar algo más en la idea de equilibrio de Nash. La noción de equilibrio de Nash no se basa en ninguna teoría sobre cómo los jugadores alcanzan el equilibrio. Lo único que se establece es que si los jugadores eligen estrategias que conjuntamente son las respuestas óptimas, entonces ninguno de los jugadores tiene incentivos para cambiar de estrategia. Pero no dice nada acerca de cómo los jugadores llegan a seleccionar estrategias que son conjuntamente respuestas óptimas las unas con respecto a las otras.

En el artículo original de 1950 en el que Nash presenta su idea de equilibrio, no dice nada acerca de cómo se alcanza el equilibrio. Sin embargo, en la tesis doctoral que Nash había escrito antes y de donde sacó su artículo, sí incluyó algunas observaciones sobre la ocurrencia de equilibrios (véase Nash 1996: 32-33). En concreto, propuso dos mecanismos distintos, uno que exige la racionalidad y otro que no.

De acuerdo con el primero, el equilibrio de un juego coincide con la predicción racional de cómo debería jugarse el juego. Los jugadores racionales son capaces de analizar la naturaleza del juego, establecer qué cuenta como solución racional y anticipar que, dada la racionalidad del rival, la mejor opción posible es jugar para conseguir el equilibrio de Nash. Esto requiere suponer que los agentes son racionales, tienen toda la información relevante y son capaces de derivar la solución del juego incluso si no conocen el concepto de equilibrio de Nash. Como dice el propio Nash, "se trata de una interpretación racionalista e idealizadora".

De acuerdo con el segundo mecanismo, los jugadores no se caracterizan por su racionalidad: no hace falta siquiera suponer que los jugadores entienden la estructura de incentivos del juego, o que hacen cálculos mentales sobre cómo debe jugarse el juego. Los jugadores simplemente van acumulando experiencia sobre qué estrategias puras les proporcionan ventajas mayores.

Se trata por tanto de un proceso de ensayo y error, de aprendizaje paulatino acerca de las consecuencias de elegir una estrategia u otra.

Mientras que el primer mecanismo, el racionalista, es compatible con el supuesto de que el juego en forma normal se juega una sola vez, el segundo mecanismo, el del aprendizaje, sólo tiene sentido si entendemos que el juego se juega una y otra vez, de forma que los resultados del pasado permiten que el aprendizaje o ajuste gradual tenga lugar.

Aunque caben otras interpretaciones más detalladas del equilibrio de Nash (véase Kreps 1990c: 140-150), en última instancia se pueden reconducir a estos dos mecanismos, el del aprendizaje y el de la racionalidad. Ante múltiples experimentos de laboratorio que demuestran que las personas rara vez se ajustan a los supuestos racionalistas, la teoría de juegos, sobre todo en los últimos quince años, ha ido dando cada vez más importancia a los procesos de aprendizaje, en detrimento del supuesto clásico de racionalidad. No se van a examinar aquí los argumentos a favor y en contra de cada una de estas interpretaciones del equilibrio de Nash, pues eso nos llevaría a una discusión metodológica demasiado larga. Cuando aparezcan a partir de ahora equilibrios de Nash, no se harán comentarios acerca de cómo deben entenderse dichos equilibrios, aunque, en consonancia con lo explicado en el capítulo anterior, la interpretación natural en muchos casos sea la racionalista, es decir, la de que los agentes son capaces de entender la estructura del juego y anticipar la solución racional.

Kreps plantea una duda general sobre la interpretación racionalista. A su juicio, los jugadores elegirán sus estrategias en consonancia con lo que se establece en el equilibrio de Nash sólo cuando dicho equilibrio coincida con lo que los jugadores entienden que es la forma natural de jugar el juego. Según la interpretación racionalista, los agentes racionales llegan a entender que la forma natural de jugar el juego es la que desemboca en el equilibrio de Nash. Sin embargo, cabe dudar de esta suposición. Kreps (1990a: 397) propone un juego que plantea las mismas dudas con respecto al equilibrio de Nash que las que se planteaban en el juego del cuadro 2.6 con respecto al criterio de dominación. El juego aparece en el cuadro 2.12.

CUADRO 2.12

UN JUEGO DE KREPS QUE CUESTIONA EL EQUILIBRIO DE NASH

		J2			
		w	*x*	*y*	*z*
J1	*U*	200, 6	3, 5	4, 3	0, –1.000
	D	0, –10.000	5, –1.000	6, 3	3, 20

El juego tiene dos equilibrios de Nash con estrategias puras (U, w) y (D, z). No obstante, Kreps sugiere que la elección "lógica" o "natural" para J2 sería la estrategia *y*, que no forma parte de ninguno de los dos equilibrios. J2 elegiría *y* porque es la única estrategia que no está asociada a la posibilidad de una pérdida considerable. Dado que hay dos equilibrios y no es evidente cuál de los dos se va a seleccionar, lo lógico para J2 es elegir la única estrategia que no puede acarrearle grandes desgracias. La cosa se complica enseguida: si J1 anticipa que J2 va a jugar *y*, entonces debería jugar *D*, pero en tal caso J2, si está seguro de que J1 jugará *D*, debería jugar *z* y terminar en el equilibrio (D, z). Aquí no está nada claro qué tipo de consideraciones terminarían conduciendo a los actores racionales a un resultado final. La confusión se debe a la existencia de varios equilibrios de Nash. Cuando hay equilibrios múltiples en un juego, la posibilidad de que haya una forma "natural" de jugar se desvanece.

Resumiendo: hay dos interpretaciones del equilibrio de Nash, una no racionalista, basada en aprendizaje, que exige que el juego se repita a lo largo del tiempo, y otra racionalista, compatible con la posibilidad de que el juego se juegue una única vez, pero que sólo resulta convincente cuando el equilibrio de Nash coincide con la forma "natural" de jugar el juego. Así sucede a menudo, aunque no en todos los casos (por ejemplo, cuando hay equilibrios múltiples). De cualquier forma, la idea misma de equilibrio de Nash es neutral con respecto al proceso de consecución del equilibrio que se postule.

Los problemas de la cooperación a través de juegos en forma normal

Buena parte de las aplicaciones de los juegos en forma normal tienen que ver con el problema de la cooperación. Éste surge cuando para conseguir ciertas ganancias es necesario que los actores (dos o más) cooperen entre sí. En cierto modo, pueden distinguirse dos planos, el plano de lo que es bueno para todos y el plano de lo que es bueno para cada uno. Si ambos coinciden, si lo que es bueno para todos es bueno para cada uno, todos tendrán incentivos para cooperar. Pero lo más habitual en la sociedad es que el plano colectivo y el plano individual no coincidan completamente. En esos casos, surgen dilemas profundos acerca de qué exige la racionalidad de las personas. La teoría de la acción colectiva, que analiza el problema de la cooperación, se centra en varios juegos en forma normal que representan las posibles modulaciones entre el plano de lo que es bueno para todos y el plano de lo que es bueno para cada uno.

Es posible representar un juego genérico de la cooperación para dos jugadores, tal como aparece en el cuadro 2.13. Cada jugador tiene dos estrate-

CUADRO 2.13

LA ESTRUCTURA DEL JUEGO DE LA COOPERACIÓN

		J2 C	J2 D
J1	C	R, R	S, T
J1	D	T, S	P, P

R = recompensa
T = tentación
P = penalización
S = "sucker" (hacer el primo)

gias, cooperar (C) o defraudar (D). Los pagos están definidos mediante letras, no mediante números. Si los dos cooperan, el resultado es una recompensa para cada uno (R). Si ninguno coopera, los dos son penalizados (P). Si uno defrauda y el otro coopera, el primero recibe el pago de la tentación de engañar al otro (T) y el segundo el pago de ser el *sucker* (hacer el primo), (S). Lo que hay en el cuadro 2.13 no es exactamente un juego, sino una estructura genérica de interacción que dependiendo de cómo definamos el orden de los pagos da lugar a unos juegos u otros. Se consideran aquí juegos simétricos, en los que las preferencias de los jugadores sobre las consecuencias son idénticas.

Se pueden definir al menos cuatro juegos posibles que tengan relevancia directa para el problema de la cooperación. Lo que distingue a cada juego, según se refleja en el cuadro 2.14, son distintas preferencias.

CUADRO 2.14

CUATRO JUEGOS DE COOPERACIÓN

Orden de preferencias	*Juego resultante*
T > R > P > S	Dilema del Prisionero
R > T > P > S	Seguridad
T > R > S > P	Gallina
R > T > S > P	Privilegiado

El juego más favorable para la cooperación, en el que no se produce ninguna tensión entre los planos colectivo e individual, es el que a veces se llama "el juego privilegiado". Desde el punto de vista del colectivo, el resultado mejor se produce con la cooperación mutua; desde el punto de vista individual, el resultado mejor se produce cooperando. Hay un único equilibrio de Nash, con estrategias puras, la cooperación mutua, puesto que cooperar domina fuertemente a defraudar. En el cuadro 2.15 se ofrece un ejemplo en el que se han dado arbitrariamente valores numéricos a las preferencias. Es fácil advertir que el único equilibrio de Nash es (C, C).

CUADRO 2.15

EL JUEGO PRIVILEGIADO

		J2	
		C	*D*
J1	*C*	3, 3	1, 2
	D	2, 1	0, 0

En el extremo opuesto se sitúa el Dilema del Prisionero (DP). En un DP se produce una contraposición entre el plano individual y el colectivo. Lo que es bueno para el grupo es malo para el agente y al revés. A pesar de que hay una posibilidad de que todo el grupo esté mejor si todos cooperan, la racionalidad les conduce a no cooperar con el otro, terminando en un resultado subóptimo. Si se observa el cuadro 2.14, las relaciones de preferencia entre *T* y *R* por un lado y entre *P* y *S* por otro están invertidas con respecto al juego Privilegiado. En el cuadro 2.16 se ofrece una representación con pagos numéricos. El DP tiene un único equilibrio de Nash (D, D), en el que los dos defraudan. Aunque los dos son conscientes de que ambos podrían estar mejor cooperando, el par (C, C) no es un equilibrio, puesto que la estructura de pagos es tal que defraudar domina fuertemente a cooperar. Si el otro coopera, lo mejor que puedo hacer es aprovecharme de su cooperación, defraudando yo mismo; y si el otro defrauda, lo mejor que puedo hacer es defraudar también, pues si no acabaré haciendo "el primo", que es el peor resultado posible. Por tanto, haga lo que haga el otro siempre me compensa defraudar. La anomalía de este juego pasa por el hecho de que siendo los dos conscientes de las ganancias de la cooperación, no tienen modo de obtenerlas, pues cada uno sabe que el otro no tiene incentivos para cooperar.

Entre el DP y el juego Privilegiado hay otros dos juegos que presentan una tensión entre los planos colectivo e individual más rebajada que en el DP pero más acentuada que en el juego Privilegiado. Por un lado se encuentra el juego

CUADRO 2.16

EL DILEMA DEL PRISIONERO

		J2: *C*	J2: *D*
J1	*C*	2, 2	0, 3
	D	3, 0	1, 1

de la Seguridad. Como puede verse en el cuadro 2.14, este juego sólo se distingue del DP en la ordenación de las dos preferencias primeras: mientras que en el DP sucede que T > R, ahora R > T, es decir, el agente está mejor cooperando si el otro coopera que defraudando si el otro coopera. En el cuadro 2.17 se presenta una ilustración numérica de este juego. No hay una ruptura completa entre el interés individual y el colectivo porque ahora el agente está dispuesto a cooperar si tiene confianza o seguridad en que el otro también va a cooperar. En el DP la seguridad de que el otro fuera cooperador inducía a defraudar. Con todo, si el jugador espera que su rival defraude en el juego de la Seguridad, lo mejor que puede hacer es defraudar también. Esto da lugar a dos equilibrios de Nash con estrategias puras, el equilibrio (C, C) y el equilibrio (D, D). Puesto que en el equilibrio (C, C) los dos jugadores están mejor que en el equilibrio (D, D), lo lógico es que se seleccione el primero frente al segundo. La clave está en que haya un mínimo de confianza entre los jugadores. Este juego tiene un tercer equilibrio de Nash con estrategias mixtas, aunque dadas las características del juego resulta difícil encontrar una justificación al uso de estrategias mixtas en este caso. Hay cierto consenso en considerar que el juego de la Seguridad es el que mejor representa la mayoría de los ejemplos de acción colectiva, sobre todo en el ámbito de la política, donde hay agentes a los que les preocupa un cierto bien colectivo por el que están dispuestos a cooperar a condición de que otros también lo hagan.

CUADRO 2.17

EL JUEGO DE LA SEGURIDAD

		J2: *C*	J2: *D*
J1	*C*	3, 3	0, 2
	D	2, 0	1, 1

Por último, está el juego del Gallina: es igual al DP sólo que ahora se invierte el orden de las dos últimas preferencias. Si en el DP es mejor para un jugador que los dos defrauden a que él coopere y el otro defraude, ahora esto cambia y lo peor para ambos jugadores es que ninguno coopere. La imagen a la que siempre se recurre para ilustrar este juego, y de donde recibe su nombre, son esas carreras de coches en que dos conductores avanzan uno contra el otro y el primero en retirarse pasa a ser considerado "gallina" o cobarde. Evidentemente, si ninguno de los dos se retira, se produce un choque con consecuencias fatales. En esas condiciones, es mejor quedar como "gallina" que provocar el choque. Una versión numérica del juego aparece en el cuadro 2.18.

Este juego tiene dos equilibrios de Nash asimétricos con estrategias puras. Un equilibrio es asimétrico cuando los jugadores reciben pagos diferentes. En este caso, los equilibrios son (D, C) y (C, D). Si J2 asume que J1 va a defraudar, lo mejor que puede hacer es cooperar; igualmente, si J1 asume que J2 va a defraudar, J1 cooperará. Es difícil saber cuál de los dos equilibrios va a prevalecer, pues depende de factores que van más allá del juego, que no se pueden incorporar en la representación matricial: en concreto, depende de lo que se conoce como "tecnologías de compromiso *(commitment)*", es decir, formas de hacer irrevocable un curso de acción, de modo que no haya marcha atrás posible. La persona que realiza un compromiso (véase el capítulo 3) se ata las manos, como hizo Ulises amarrándose al mástil del barco para no dejarse arrastrar por la tentación de ir detrás de las sirenas cuando éstas cantaban. En el ejemplo anterior, un jugador podría realizar un compromiso arrancando el volante del coche, haciendo ver al contrario que no tiene forma de modificar su trayectoria. Si ninguno de los dos jugadores pudiera realizar un compromiso, la solución más lógica del juego pasa por un equilibrio con estrategias mixtas. Con los pagos ordinales y arbitrarios del cuadro 2.18, el equilibrio con estrategias mixtas sería (1/2C, 1/2D; 1/2C, 1/2D). Este equilibrio es simétrico.

Los cuatro juegos analizados representan las variaciones posibles en la interacción estratégica que surge en los problemas de la acción colectiva. Cuál de los cuatro juegos sea el apropiado para modelizar una situación empírica

CUADRO 2.18

EL JUEGO DEL GALLINA

		J2 *C*	J2 *D*
J1	*C*	2, 2	1, 3
J1	*D*	3, 1	0, 0

dependerá de las características propias de cada situación. En cualquier caso, hay una lógica subyacente común de la que derivan estos cuatro juegos, pudiéndose mostrar cómo cambios en ciertos parámetros del problema de la acción colectiva originan los distintos juegos posibles. Estos cambios pueden proceder de las características técnicas del bien colectivo que se esté persiguiendo (Heckathorn 1996), o de variaciones en las motivaciones de los agentes (Sánchez-Cuenca 2007). Un análisis más profundo de la acción colectiva desde el punto de vista de la teoría de juegos puede encontrarse en Medina (2007).

Aplicación: Reformas administrativas

Desde un punto de vista histórico, la mayoría de los Estados se enfrenta a graves dificultades para construir una administración eficiente y meritocrática. Hay ciertas regiones del mundo, como Latinoamérica, en las que esas dificultades son especialmente complicadas, como lo demuestra la pervivencia del patronazgo, el clientelismo y la corrupción en muchos de sus Estados. Se ha sugerido que los problemas que arrastran las administraciones de los países latinoamericanos no son sino una herencia de su pasado colonial. España, según este argumento, habría llevado a aquel continente prácticas y costumbres que dieron lugar a administraciones ineficientes.

Sin embargo, cabe cuestionar que el peso de la herencia colonial fuera tan grande, puesto que, manteniéndose más o menos constante en todos los países latinoamericanos, en algunos de ellos se consiguió llevar a cabo reformas meritocráticas, mientras que en otros no. Ha de haber, por tanto, algún otro factor que explique esta variación.

Por otro lado, una reforma institucional meritocrática plantea en sí misma algunas cuestiones interesantes. Si el partido en el poder se beneficia de las ventajas políticas que le proporciona poner la administración a su servicio, ¿qué razones podría tener ese partido para aprobar una reforma que impida instrumentalizar políticamente a la administración? ¿Por qué iba a renunciar a una ventaja?

Barbara Geddes (1991) ha propuesto un modelo muy sencillo sobre las reformas meritocráticas en Latinoamérica basado en un juego en forma normal. La autora parte del supuesto de que los políticos son racionales; en concreto, son maximizadores de votos. Aunque a los políticos les preocupen las políticas que se realizan desde el poder, en última instancia entienden que para poder realizar sus políticas preferidas han de ganar primero las elecciones. Con el fin de simplificar al máximo, partimos de una situación en la que sólo hay dos partidos que compitan por el poder, el Partido 1 y el Partido 2. Geddes plantea dos juegos. El primero tiene lugar durante la campaña electoral. El segundo se produce cuando uno de los partidos ha ganado las elecciones y se enfrenta a la decisión de introducir una reforma meritocrática o no.

En el primer juego, que se representa en el cuadro 2.19, los partidos pueden no recurrir al patronazgo para ganar las elecciones o recurrir al mismo. Si no recurren al patronazgo, dependen enteramente del atractivo de sus propuestas para conseguir apoyos electorales. Sea v_i la probabilidad de ganar las elecciones del partido i (i = 1, 2) cuando no usa el patronazgo. Si i usa patronazgo, consigue un beneficio electoral adicional x_i que se resta de lo que obtiene el partido j. Puesto que los políticos sólo buscan votos en este modelo, los pagos quedan definidos mediante v_i y x_i.

CUADRO 2.19

EL JUEGO ELECTORAL

		Partido 2	
		No patronazgo	*Patronazgo*
Partido 1	*No patronazgo*	v_1, v_2	$v_1 - x_2, v_2 + x_2$
	Patronazgo	$v_1 + x_1, v_2 - x_1$	$v_1 + x_1 - x_2, v_2 - x_1 + x_2$

El juego del cuadro 2.19 sólo tiene un equilibrio de Nash con estrategias puras, en el que los dos partidos recurren al patronazgo. El patronazgo es la estrategia dominante para ambos jugadores.

Desde el punto de vista de las elecciones, por tanto, los dos partidos tienen incentivos para recurrir al patronazgo. Geddes, sin embargo, considera que hay un segundo juego que tiene lugar en el Parlamento una vez realizadas las elecciones. El partido mayoritario accede al poder, mientras que el minoritario se queda en la oposición. La cuestión que se plantea entonces es si se aprueba una reforma meritocrática de la administración o no. Ahora interviene un factor adicional que no estaba presente en el primer juego: los posibles beneficios electorales de votar a favor de la reforma cuando parte de la sociedad rechaza la práctica del patronazgo. Si se tiene en cuenta este factor, puede ocurrir que, bajo ciertas condiciones, los beneficios de votar por la reforma sean superiores a los beneficios que proporciona el patronazgo.

En este segundo juego, que se representa en el cuadro 2.20, el partido mayoritario está en filas y el minoritario en columnas. Los pagos son muy parecidos a los del juego anterior. Aparece un nuevo parámetro, e, que mide los beneficios electorales de votar en el Parlamento en consonancia con el deseo de la opinión pública a favor de la reforma. Cuanto mayor sea el apoyo a la reforma en la ciudadanía, mayor es el beneficio de votar a favor de la reforma. Nótese que para que se apruebe la reforma es necesario que el partido mayoritario esté a favor. De esta manera, si el partido mayoritario vota

CUADRO 2.20

EL JUEGO PARLAMENTARIO

		Partido minoritario	
		Reforma	*Patronazgo*
Partido mayoritario	*Reforma*	v_1, v_2	$v_1 + e, v_2 - e$
	Patronazgo	$v_1 + x_1 - x_2 - e, v_2 + x_2 - x_1 + e$	$v_1 + x_1 - x_2, v_2 - x_1 + x_2$

en contra de la reforma y el minoritario a favor, continúa el patronazgo en la administración, pero el partido minoritario se lleva los beneficios electorales de haber actuado tratando de reformar la administración.

Para calcular el equilibrio de Nash en este segundo juego, es necesario hacer algún supuesto sobre el valor de e en relación a los beneficios del patronazgo. Así, cuando ocurre que $(x_1 - x_2) > e$, es decir, cuando el beneficio electoral de apoyar la meritocracia es menor que el beneficio electoral de mantener el patronazgo, el partido mayoritario se opone a la reforma. El partido minoritario, en ese caso, vota a favor de la reforma, pues la estrategia "reforma" domina fuertemente a la estrategia "patronazgo". El equilibrio de Nash, por tanto, es (Patronazgo; reforma) si $(x_1 - x_2) > e$.

Cuando $(x_1 - x_2) < e$, los dos partidos votan a favor de la reforma. Por un lado, sigue siendo "reforma" la estrategia dominante para el partido minoritario. Y, por otro, ahora le compensa al partido mayoritario aprobar la reforma, pues el beneficio electoral de la misma es mayor que el beneficio del patronazgo. El equilibrio de Nash resultante es (Reforma; reforma) si $(x_1 - x_2) < e$.

Con el fin de extraer consecuencias empíricas del modelo, Geddes realiza el siguiente supuesto: considera que cuanto más parecidos sean los partidos entre sí en cuanto a apoyo electoral, más parecidos serán también los beneficios del patronazgo y por lo tanto menor será la cantidad $(x_1 - x_2)$. Eso significa que cuanto más parecido sea el apoyo electoral de los dos principales partidos, más probable es que se satisfaga la inecuación $(x_1 - x_2) < e$ y, de este modo, se aprueba la reforma.

Esta hipótesis, derivada del modelo mediante un sencillo ejercicio de estática comparativa, puede someterse a prueba empírica, comprobando si es cierto que las reformas meritocráticas de la administración que se han aprobado en Latinoamérica se corresponden con la situación que describe el modelo de dos partidos con parecida fuerza electoral. Geddes propone un diseño de investigación comparativo en el que hay casos de reforma (Colombia, Venezuela, Uruguay) y de no reforma (Brasil, Chile). En general, encuentra una confirmación razonable de la hipótesis: las reformas tienden a producirse cuando los grandes partidos tienen una fuerza electoral semejante.

3

Juegos en forma extensiva

Caracterización de un juego en forma extensiva

En los juegos en forma normal, se considera que los jugadores eligen sus estrategias simultáneamente o, lo que equivale a lo mismo, que cada jugador elige su estrategia sin saber cuál elige su rival. Esto es una limitación importante, pues en muchas situaciones reales se observa una secuencia de jugadas, de tal manera que los jugadores van tomando decisiones conforme avanza el juego. La representación de un juego en forma extensiva permite modelizar tanto la secuencia de jugadas como la información de la que disponen los jugadores en cada jugada. Supone un avance fundamental con respecto a los juegos en forma normal, haciendo que la teoría de juegos se vuelva más realista y más atenta a los detalles de cada situación estratégica.

En un juego en forma extensiva la idea de estrategia es algo más rica que en un juego en forma normal. En un juego en forma normal una estrategia es un plan completo de acción que se establece de una vez por todas. No puede ser de otra manera dado que no se observa la estrategia del contrario. En cambio, en un juego en forma extensiva una estrategia es un plan de acción contingente, que especifica qué hará el jugador ante cada movimiento posible del rival.

Los juegos en forma extensiva más simples se pueden representar mediante un árbol de decisión. El árbol se compone de nodos y ramas. De cada nodo pueden salir varias ramas que se dirigen a otros nodos. Los árboles de decisión facilitan la comprensión del juego. Pero es importante subrayar desde el principio que la representación arbórea del juego no siempre es posible en los juegos en forma extensiva. Por ejemplo, si las estrategias del jugador no son discretas, sino continuas, el árbol no puede dar cuenta de la estructura del juego. Supóngase que se está analizando un juego de negociación en el que un jugador ha de hacer una oferta entre 0 y 1 euro. El conjunto total de ofertas no se puede representar discretamente mediante ramas. En realidad, lo esencial de un juego en forma extensiva no es el árbol, sino la especificación de: a) la secuencia de jugadas u orden de movimientos, b) las estrategias posibles de los jugadores, c) la información que tienen los juga-

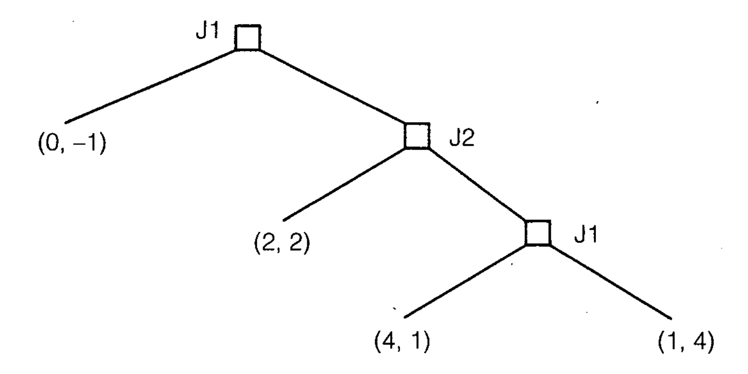
dores en cada movimiento, y d) los pagos que reciben los jugadores para cada combinación posible de estrategias. La especificación de estos cuatro elementos se puede hacer con un árbol o sin él.

Un árbol es un conjunto de nodos conectados mediante ramas que representan una relación de precedencia temporal. Si un nodo está debajo de otro (o a la derecha de otro, si el árbol se dibuja apaisado, de izquierda a derecha), eso significa que el que está debajo interviene después del que está arriba. La regla fundamental de construcción del árbol es que *cada nodo sólo puede tener un predecesor* o, con otras palabras, de dos nodos no pueden salir ramas que acaben en el mismo nodo. Además, hay que tener en cuenta la existencia de nodos terminales, nodos de los que no sale ninguna rama porque señalan el final del juego. Es en los nodos terminales donde se incluyen los pagos de los jugadores.

En el cuadro 3.1 puede verse un primer ejemplo de árbol de decisión. Se trata de un árbol muy sencillo, con tres jugadas o movimientos y cuatro nodos terminales. Junto a cada nodo no terminal, se indica qué jugador ha de actuar: J1 interviene en la primera y en la tercera jugada, J2 mueve en la segunda. De cada nodo no terminal salen dos ramas, lo que significa que en este ejemplo cada jugador tiene dos cursos de acción posibles en cada jugada. En los nodos terminales se han incluido unos pagos arbitrarios, siendo el primer número el pago de J1 y el segundo número el pago de J2.

CUADRO 3.1

EJEMPLO DE UN JUEGO EN FORMA EXTENSIVA

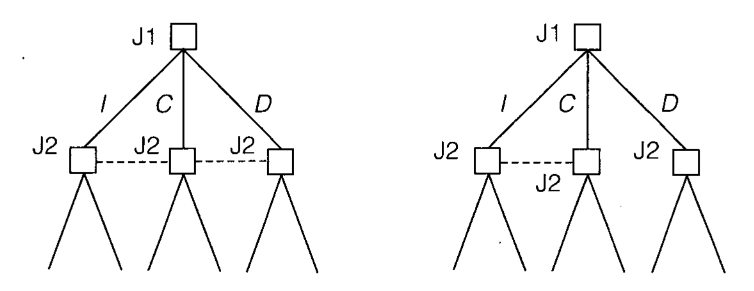


Con respecto a la información de la que disponen los jugadores, en cada fase del juego en que interviene un jugador se especifica su *conjunto de información (information set)*. El conjunto de información puede cubrir uno o varios nodos. (Técnicamente, se dice que el conjunto de información hace una "partición" de los nodos.) Si un conjunto de información tiene un único

nodo, se le llama *singleton* en inglés. En la medida en que un nodo contiene una descripción completa de todo lo que ha sucedido hasta el momento, si el conjunto de información es un *singleton*, entonces el jugador, en ese nodo, conoce toda la historia anterior del juego. Sin embargo, si el conjunto de información cubre varios nodos, es que el jugador no sabe a ciencia cierta en qué parte del árbol se encuentra o, lo que es igual, no sabe qué jugada ha realizado su rival en el movimiento anterior. Cuando el conjunto de información cubre más de un nodo, lo representamos gráficamente mediante una línea discontinua que une los nodos que componen el conjunto de información.

CUADRO 3.2

ÁRBOLES CON INFORMACIÓN IMPERFECTA



En el cuadro 3.2 tenemos dos ejemplos. En el árbol de la izquierda, comienza jugando J1, que tiene tres acciones posibles, *I*, *C* o *D*. A continuación interviene J2. Pero nótese que los nodos de J2 están conectados por una línea discontinua (el conjunto de información cubre los tres nodos). Esto significa que, cuando le toca jugar a J2, éste no sabe qué es lo que ha hecho J1, si ha jugado *I*, *C* o *D*. En el árbol de la derecha tenemos un juego parecido, sólo que ahora J2 tiene dos conjuntos de información. El primero cubre los nodos correspondientes a las acciones *I* y *C*, el segundo es un *singleton* formado por el nodo correspondiente a la acción anterior *D*. Ahora J2, cuando juega, sabe si J1 ha jugado *D* o si no ha jugado *D*. Pero si J1 no ha jugado *D*, J2 no es capaz de distinguir si J1 ha jugado *I* o *C*.

Mediante la representación de los conjuntos de información de los jugadores, podemos especificar qué sabe cada jugador en cada fase del juego. Cuando el conjunto de información cubre más de un nodo, es necesario además especificar cuáles son las creencias del jugador. Por ejemplo, en el fragmento de árbol en la parte izquierda del cuadro 3.2, el jugador tiene creencias sobre si se encuentra en el nodo izquierdo, central o derecho. Esas creencias se representan formalmente mediante una distribución de probabilidad. Por ejemplo, las creencias de estar en los nodos izquierdo,

central y derecho podrían ser: 1/5, 1/5 y 3/5 respectivamente. Recuérdese que en una distribución de probabilidad las probabilidades han de sumar uno.

Las creencias sólo intervienen si no todos los conjuntos de información son *singletons*. Podemos establecer la siguiente distinción: se dice que un juego en el que *todos* sus conjuntos de información son *singletons* es un juego de *información perfecta*. En cambio, un juego en el que hay conjuntos de información que cubren más de un nodo es un juego de *información imperfecta*. Como luego se explica, todo juego en forma normal es un juego de información imperfecta. En cambio, los juegos en forma extensiva pueden ser de información perfecta o imperfecta.

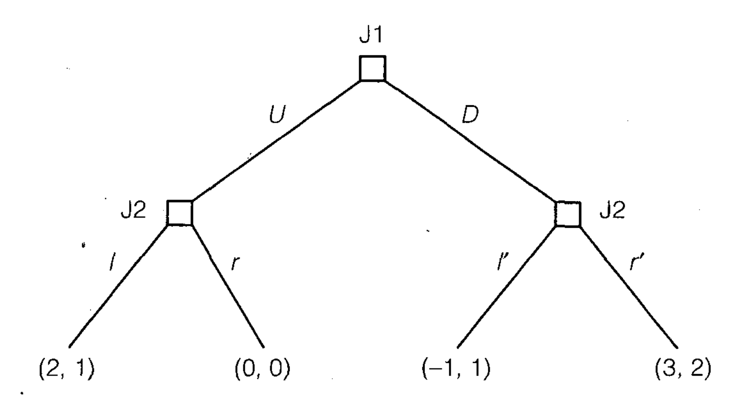
Por último, los juegos en forma extensiva son más flexibles que los juegos en forma normal gracias a la posibilidad de incluir sucesos exógenos en el juego, es decir, sucesos que pueden alterar los pagos de los jugadores pero que no tienen que ver con las acciones o elecciones que realizan los propios jugadores. Esos sucesos exógenos pueden ocurrir en cualquier momento del juego y se atribuyen a un jugador ficticio que suele recibir el nombre de "Naturaleza" o "Azar": Por ejemplo, supongamos un juego entre un Gobierno y los electores. El Gobierno lleva a cabo una política económica y los electores, observando los resultados económicos, han de decidir si volver a votar al Gobierno o votar a la oposición. El problema está en que esos resultados no dependen sólo de lo que haga el Gobierno, sino también de las condiciones objetivas en las que se encuentra el país, que por simplificar diremos que pueden ser buenas o malas (ciclo económico internacional, herencia recibida del anterior Gobierno, etc.). Por muy bien que lo haga el Gobierno, los resultados pueden ser pobres si las condiciones objetivas son malas, y al revés. Para incluir en el juego el suceso exógeno de que las condiciones son buenas o malas, podríamos considerar que la primera jugada corresponde al jugador "Naturaleza", que puede decidir si las condiciones son buenas o malas. Cada tipo de condiciones corresponde a una rama distinta que sale del nodo inicial de "Naturaleza". Este artificio se utiliza recurrentemente en el capítulo 5, donde se tratan los juegos de señal.

Relación entre juegos en forma normal y extensiva

Los juegos en forma extensiva se pueden reducir a juegos en forma normal. El interés de estudiar esta reducción es que ayuda a entender mejor qué es una estrategia en cada tipo de juego y además prepara el terreno para la introducción de la idea de equilibrio de perfección en el subjuego que se explica más adelante en este capítulo. La principal diferencia entre ambos tipos de juego consiste en que mientras en un juego en forma extensiva los jugadores van decidiendo qué hacer en función de lo que hacen sus rivales, en un

CUADRO 3.3

JUEGO EN FORMA EXTENSIVA



juego en forma normal las estrategias deben cubrir desde el comienzo todas las contingencias posibles.

El juego en forma extensiva que aparece en el cuadro 3.3 es de información perfecta, pues todos los conjuntos de información son *singletons*. Este juego se puede representar en forma normal tal y como aparece en el cuadro 3.4. Puesto que la acción de J2 de mover hacia la izquierda no es la misma cuando J1 ha jugado *U* que cuando J1 ha jugado *D*, debemos distinguirlas mediante nombres diferentes, en este caso se llaman *l* y *l'*. Lo mismo sucede con la acción de mover a la derecha, *r* y *r'*. Esto significa que J2 tiene cuatro estrategias distintas en el juego en forma extensiva, que deben poder ser representadas en el juego en forma normal. J1 tiene dos estrategias posibles, *U* o *D*. El cruce de las cuatro estrategias posibles de J2 con las dos de J1 da lugar a ocho resultados distintos. Sin embargo, en el juego en forma extensiva sólo aparecen cuatro resultados, sólo hay cuatro nodos terminales. ¿De dónde salen los otros cuatro?

CUADRO 3.4

EL JUEGO DEL CUADRO 3.3 EN FORMA NORMAL

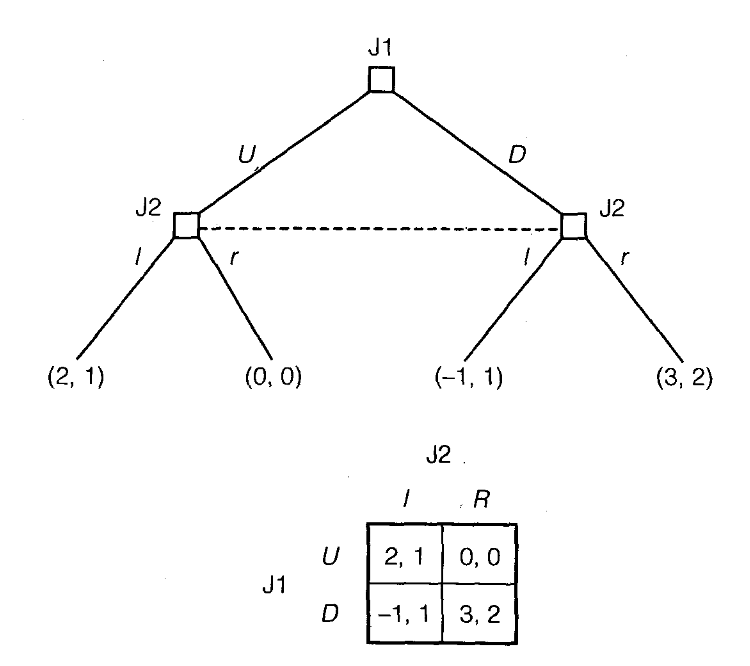
		J2			
		l, l'	*l, r'*	*r, l'*	*r, r'*
J1	*U*	2, 1	2, 1	0, 0	0, 0
	D	–1, 1	3, 2	–1, 1	3, 2

Como puede verse en el cuadro 3.4, los pagos están duplicados, pues las estrategias en un juego en forma normal son planes completos de acción, que han de cubrir todas las posibilidades, de manera tal que, por ejemplo, la estrategia de J2 *l*, *l′* significa: si J1 juega *U*, J2 hace *l*; si J1 hace *D*, J2 juega *l′*. La duplicación de los pagos se produce entonces porque aunque el resultado final pueda ser el mismo, las estrategias no son iguales: si J1 juega *U*, el resultado es el mismo con las estrategias (*l*, *l′*) y (*l*, *r′*), ya que la parte derecha del juego no llega a desarrollarse.

La reducción es más directa si se trata de un juego de información imperfecta. En el cuadro 3.5 tenemos dos juegos, uno en forma extensiva y otro en forma normal. El juego en forma extensiva se caracteriza por el hecho de que los nodos de J2 están incluidos en un mismo conjunto de información, esto es, por el hecho de que J2 desconoce la jugada anterior de J1. No teniendo información sobre lo que ha pasado, su decisión de mover hacia la izquierda (acción *l*) es la misma ya esté en el nodo izquierdo o en el nodo derecho y por eso no distinguimos la estrategia *l* y *l′*, sino que representamos ambas con un nombre único. De ahí que los cuatro resultados posibles en el juego en forma extensiva se correspondan con los cuatro resultados posibles del juego en forma normal.

CUADRO 3.5

UN JUEGO EN FORMA EXTENSIVA Y NORMAL



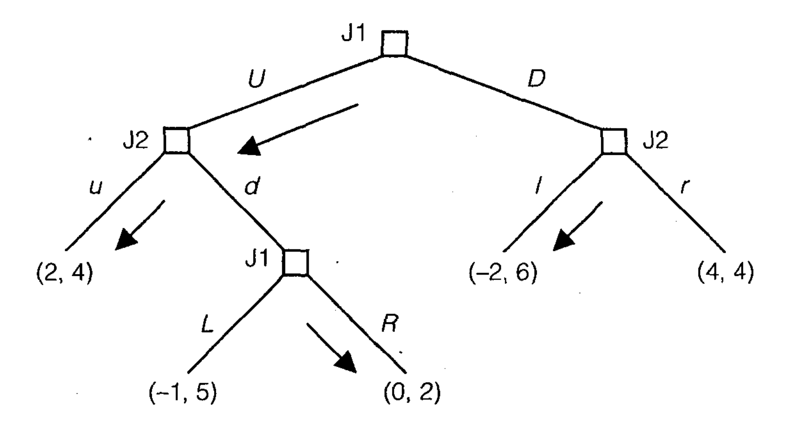
Equilibrio por retroinducción

En los juegos en forma extensiva con información perfecta hay siempre un equilibrio de Nash con estrategias puras. Formalmente, esto se demuestra en el llamado teorema de Zermelo-Kuhn. La manera de calcular el equilibrio es muy simple. Consiste en aplicar un procedimiento o algoritmo conocido como "retroinducción" *(backwards induction).* Se comienza por cualquier nodo anterior a un nodo terminal y se va retrocediendo hacia el origen del juego mediante la eliminación de las estrategias que estén fuertemente dominadas. Si al comenzar por el nodo seleccionado no se llega hasta la primera jugada, hay que volver a comenzar por otro nodo similar, que preceda a un nodo terminal, hasta conseguir en algún momento llegar al nodo inicial. Cuando se llega hasta el nodo inicial, se configura lo que se llama una *ruta de equilibrio (equilibrium path).* No obstante, el equilibrio de Nash en un juego en forma extensiva no está formado únicamente por la ruta de equilibrio. En realidad, en el equilibrio intervienen todas las mejores respuestas de cada jugador a cada jugada posible de su rival.

Esto se puede entender mucho mejor a través de un ejemplo. Sea el juego de información perfecta que aparece en el cuadro 3.6. Situémonos en el nodo final en el que interviene por segunda vez J1. J1 tiene dos acciones posibles, *L* o *R*. Si escoge *L* el pago es –1, si elige *R* el pago es 0. *R* domina a *L*, por tanto J1 elegirá *R*. Este razonamiento se resume en una flecha que parte del segundo nodo de J1 hacia *R*. Ahora retrocedemos hasta el nodo izquierdo de J2. J2, sabiendo, por el razonamiento anterior, que si J1 vuelve a tener oportunidad de jugar, jugará *R*, compara los pagos de sus dos estrategias

CUADRO 3.6

UN JUEGO RESUELTO POR RETROINDUCCIÓN



posibles, *u* y *d*. Si juega *u*, el juego acaba ahí y J2 recibe 4. Si juega *d*, sabe que luego J1 jugará *R*, luego J2 obtendrá 2. Como 4 es mejor que 2 (como *u* domina a *d*), J2 jugará *u*. Por eso, trazamos la flecha correspondiente. Si J2 estuviera en su nodo derecho, elegirá *l* en lugar de *r*, pues con *l* obtiene 6 y con *r* 4. La flecha va paralela entonces a *l*. Retrocedemos ahora hasta el primer nodo de J1. J1 ha de elegir en primera instancia entre *U* y *D*. Si elige *D*, sabe que J2 luego elegirá *l* y el resultado es –2. Si elige *U*, sabe que luego J2, sabiendo J2 que si elige *d* J1 jugará *R* en su segundo movimiento, jugará *u*, con un resultado para J1 de 2. Como 2 es mejor que –2, J1 elige *U*.

La ruta de equilibrio es *U*, *u*. J1 juega *U* y J2 juega *u*, acabando ahí el juego. Pero esta ruta de equilibrio no constituye una especificación completa del equilibrio, pues la ruta de equilibrio es ésa porque J1 anticipa que si el juego evolucionara por otra ruta, J2 haría algo distinto. El equilibrio está formado por todas las respuestas óptimas, las que tienen una flecha marcada. En este ejemplo, el equilibrio se formularía especificando primero todas las elecciones de equilibrio de J1 y luego todas las de J2. Concretamente, el equilibrio de Nash calculado por retroinducción sería: (U, R; u, l). Nótese que aunque J1 nunca tiene la oportunidad de jugar *R* ni J2 de jugar *l*, la ruta de equilibrio se sostiene sobre las expectativas de que si el juego avanzara por una ruta distinta en la que J1 tuviera una segunda oportunidad de mover, o J2 se encontrara en su nodo derecho, entonces J1 jugaría *R* y J2 *l*.

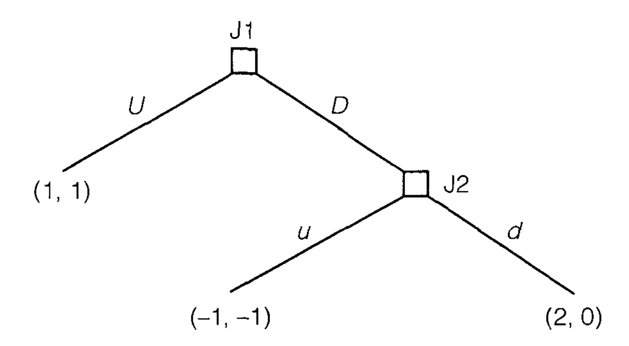
Todo equilibrio calculado mediante retroinducción es un equilibrio de Nash, pero no todo equilibrio de Nash se puede calcular mediante retroinducción. Esto significa que *los equilibrios por retroinducción son un subconjunto del conjunto de equilibrios de Nash*. ¿Pero cómo puede haber equilibrios de Nash que no sigan la lógica de la retroinducción? En la próxima sección se analiza esta cuestión con bastante detalle, lo que obliga a introducir un refinamiento técnico en la idea de equilibrio de Nash, pues resulta que no todos los equilibrios de Nash son razonables.

Equilibrio de perfección en el subjuego

Hay un ejemplo de Richard Selten que muestra de forma muy simple en qué sentido el equilibrio por retroinducción es más "exigente" en términos de racionalidad que el equilibrio de Nash. En el juego en forma extensiva que aparece en el cuadro 3.7, J1 puede hacer *U*, en cuyo caso se acaba el juego, o hacer *D*, en cuyo caso interviene J2, que puede hacer *u* o *d*. Aplicando el procedimiento de la retroinducción, comenzamos por el nodo de J2. Es evidente que J2, si llega a jugar, jugará *d*, pues con *d* obtiene 0, mientras que con *u* obtiene –1. Sabiendo esto J1, su decisión es trivial: en la primera jugada, elige *D*, pues con *D* termina obteniendo 2, frente a 1 que obtendría con *U*. En este caso el equilibrio del juego, (D; d), coincide con la ruta de equilibrio.

CUADRO 3.7

EL JUEGO DE SELTEN



Podemos ahora representar el juego en forma extensiva del cuadro 3.7 como un juego en forma normal. La transformación aparece en el cuadro 3.8. Nótese que cuando J1 elige *U*, los pagos de J2 son los mismos ya elija *u* o *d* por la sencilla razón de que cuando J1 elige *U*, J2 no llega a intervenir.

CUADRO 3.8

EL JUEGO DE SELTEN EN FORMA NORMAL

		J2	
		U	*d*
J1	*U*	1, 1	1, 1
	D	–1, –1	2, 0

Un breve examen del juego del cuadro 3.8 permite descubrir que tiene dos equilibrios de Nash, (U; u) y (D; d). Sin embargo, acabamos de ver que (U; u) no es un equilibrio por retroinducción. ¿Por qué desaparece el equilibrio (U; u) al analizar el juego en forma extensiva mediante retroinducción? Para poder responder, conviene fijarse en lo que significa el equilibrio de Nash (U; u). El sentido de este equilibrio es el siguiente: si J1 se convence de que J2 va a jugar *u*, entonces la respuesta óptima de J1 es jugar *U*; por otro lado, si J1 va a jugar *U*, la respuesta óptima de J2 es *u*. Es verdad que una vez que J1 juega *U*, J2 obtiene el mismo pago con *u* que con *d*, pero si jugara *d*, entonces J1 jugaría *D*, luego (U; d) no puede ser un equilibrio, mientras que (U; u) sí. El equilibrio de Nash (U; u) se sostiene sobre la creencia de J1

de que J2 va a jugar *u*. La cuestión que plantea Selten es: ¿resulta razonable esa creencia? ¿Es convincente que si J2 es un jugador racional, vaya a elegir *u* en lugar de *d* en caso de que le toque jugar? El análisis del juego en forma extensiva demuestra que la respuesta en ambos casos es negativa, que el equilibrio (U; u) no resulta razonable porque J2, si llega a jugar, nunca elegirá *u*: siempre sacará más jugando *d*. J2, por decirlo así, no va a tirar piedras contra su propio tejado. Pero en ese caso J1 nunca pensará que J2 podría elegir *u* y entonces no tendrá ningún tipo de temor de que J2 pueda elegir *u* en caso de que J1 elija *D*.

A J2 le convendría que J1 se creyera que si juega *D*, J2 va a responder con *u*, pues en ese caso J1 nunca hará *D* y se seleccionará el equilibrio (U; u) que le proporciona a J2 más utilidad que el equilibrio (D; d). Sin embargo, J2 no puede llegar a convencer a J1 de que va a jugar *u*, porque una vez que le toca jugar, es irracional para J2 elegir *u*. El equilibrio (U; u) no es razonable porque sólo tiene sentido bajo el supuesto de una amenaza que no es *creíble*, la amenaza de J2 según la cual si le toca jugar, jugará *u* y no *d*. La amenaza no es creíble porque, en caso de tener que llevarla a cabo, J2 está mejor renegando que cumpliéndola.

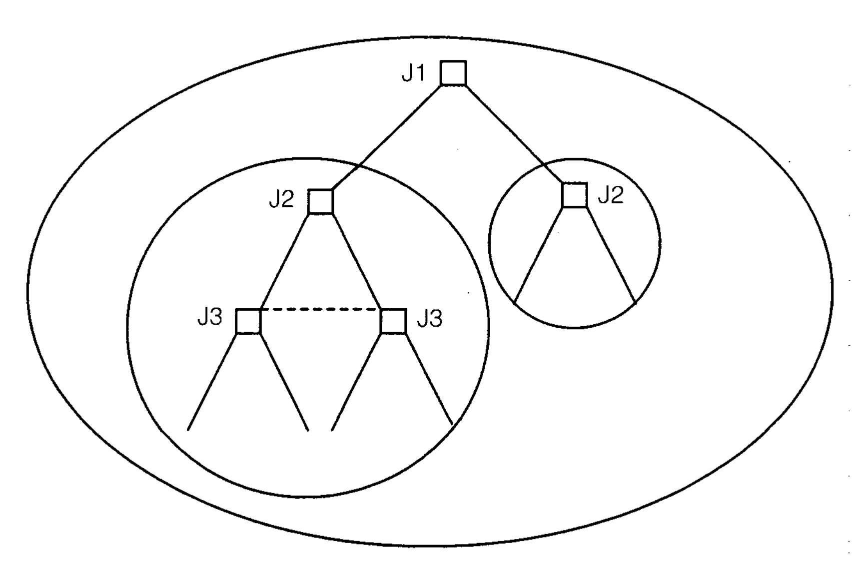
La diferencia principal entre el equilibrio de Nash y el equilibrio calculado por retroinducción es que en el primero no se tiene suficientemente en cuenta el problema de la credibilidad de las promesas y amenazas que puedan realizar los jugadores. Una promesa o una amenaza sólo es creíble si llegado el momento de llevarla a cabo, el jugador está mejor cumpliéndola que renegando. En el análisis de un juego las amenazas y promesas increíbles no desempeñan papel alguno. El equilibrio por retroinducción filtra los equilibrios de Nash pasándolos por el tamiz de la credibilidad.

El problema de la retroinducción es que resulta de aplicación limitada: sólo sirve para juegos con información perfecta. Si hay conjuntos de información con múltiples nodos, el procedimiento de ir viendo en cada nodo qué estrategia es dominante deja de ser factible. Para evitar esta restricción, Selten propuso un concepto nuevo de equilibrio, el equilibrio de perfección en el subjuego *(subgame perfect equilibrium)*, que generaliza la intuición que subyace a la lógica de la retroinducción. Para explicar este tipo de equilibrio, es necesario comenzar con una definición. Un subjuego propio *(proper subgame)* es una parte de un juego en forma extensiva que puede tratarse como un juego en sí mismo. Más técnicamente, un subjuego propio es un subconjunto de nodos de un juego que contiene un nodo inicial y todos sus sucesores.

Veamos cómo se aplica esta definición. En el cuadro 3.9 tenemos un juego en forma extensiva. Este juego tiene tres subjuegos propios, el que comienza en el nodo derecho de J2, el que comienza en el nodo izquierdo de J2 y el que comienza en el nodo de J1 y que coincide con el propio juego. No hay ningún subjuego que comience con la jugada de J3 porque no hay un nodo inicial de J3.

CUADRO 3.9

SUBJUEGOS DE UN JUEGO



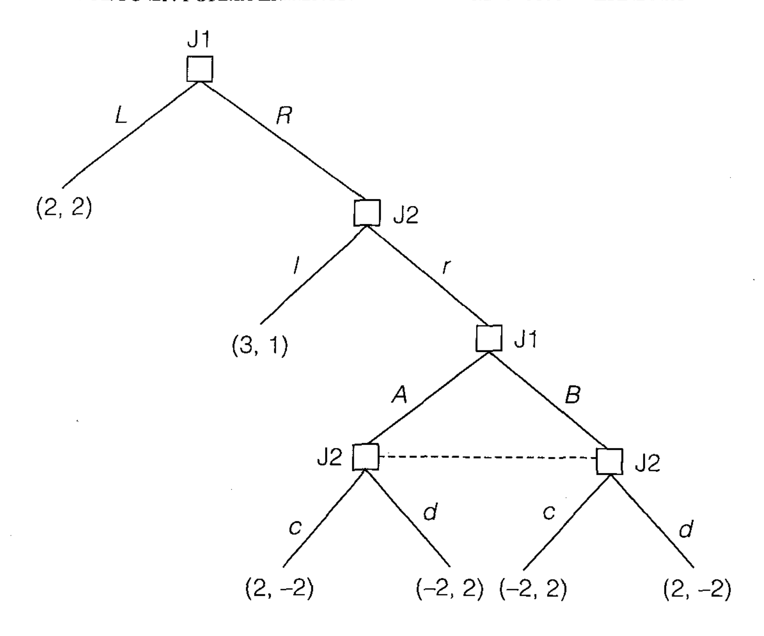
Ahora ya cabe introducir el equilibrio de perfección en el subjuego: se trata de una combinación de estrategias que en cada uno de los posibles subjuegos del juego configura un equilibrio de Nash. Al exigir que las estrategias de equilibrio formen un equilibrio de Nash en cada subjuego del juego, lo que se está haciendo es obligar a esas estrategias a ser las respuestas óptimas en cualquier punto del juego. Es decir, en cada momento las estrategias de equilibrio han de coincidir con la respuesta óptima del jugador. Pero esto significa que el equilibrio nunca podrá basarse en una amenaza o promesa increíbles, pues las estrategias de equilibrio son en cada punto óptimas, lo que obliga a descartar la posibilidad de ejecutar amenazas o promesas que no convengan al jugador.

En el cuadro 3.10 aparece un juego en forma extensiva en el que no se puede aplicar la retroinducción, pues en el segundo movimiento de J2 su conjunto de información está compuesto por dos nodos. No podemos determinar qué hará J2 en cada nodo porque J2 no sabe en cuál de los dos nodos se encuentra. El juego tiene tres subjuegos. El primero está formado por el segundo nodo de J1, en el que J1 puede hacer *A* o *B*. Se trata, según la definición, de un nodo inicial que contiene todos sus sucesores. Además, hay un segundo subjuego formado por el nodo inicial de J2 y todo lo que viene detrás. El tercer subjuego coincide con la totalidad del juego.

Comencemos por el subjuego más reducido de todos, es decir, el que se inicia en el segundo nodo de J1. Este subjuego coincide, según se vio ante-

CUADRO 3.10

JUEGO EN FORMA EXTENSIVA DE INFORMACIÓN IMPERFECTA



riormente, con un juego en forma normal, tal y como se representa en el cuadro 3.11.

CUADRO 3.11

SUBJUEGO EN FORMA NORMAL DEL JUEGO DEL CUADRO 3.10

		J2: *c*	J2: *d*
J1	*A*	2, –2	–2, 2
	B	–2, 2	2, –2

El juego del cuadro 3.11 no tiene un equilibrio de Nash con estrategias puras, aunque sí lo tiene con estrategias mixtas. Siendo el juego simétrico, las estrategias mixtas de ambos jugadores son idénticas. J1 hace indiferente a J2 cuando:

$$UE_{J2}(c) = p(-2) + (1-p)(2) = UE_{J2}(d) = p(2) + (1-p)(-2)$$

Esta ecuación sólo se satisface cuando $p = 1/2$, siendo p la probabilidad de que J1 elija A. Igualmente, la estrategia mixta de J2 también es jugar c con probabilidad 1/2. Una vez que conocemos las probabilidades de equilibrio, se puede calcular el pago esperado para ambos jugadores de participar en el subjuego en forma normal. Por ejemplo, para J2 el pago esperado es:

$$UE_{J2}\left(\frac{1}{2}c, \frac{1}{2}d\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}(2)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(-2)\right] = 0$$

Dado que el pago esperado es 0 según el equilibrio de Nash, podemos pasar al subjuego superior, el del primer nodo de J2, y considerar si J2 elegirá l o r. Si J2 juega r, sabe que se pasa al juego en forma normal, donde el pago esperado es 0. Pero si juega l, J2 obtiene 1, que es mejor que 0. Luego el equilibrio de Nash de este segundo subjuego se puede formular así, empezando, como siempre, primero por las estrategias de J1 y luego por las de J2: (1/2A, 1/2B; l, 1/2c, 1/2d). Por último, abordamos el subjuego que coincide con el propio juego y razonamos como antes: J1 ha de elegir entre R, anticipando que J2 luego elegirá l para evitar pasar al subjuego en forma normal, y L. R, de acuerdo con estos cálculos, le da 3, mientras que L sólo 2. La elección es por tanto R. Ahora podemos poner todos los elementos juntos y formular así el equilibrio de perfección en el subjuego:

$$\left(R, \frac{1}{2}A, \frac{1}{2}B; l, \frac{1}{2}c, \frac{1}{2}d\right).$$

El equilibrio de perfección en el subjuego es uno de los más populares en los modelos de teoría de juegos que se elaboran en ciencia política y sociología, ya que se adapta a muchas situaciones posibles y resulta más convincente, aunque también más complicado, que el equilibrio de Nash. Si bien todos los equilibrios de perfección en el subjuego son equilibrios de Nash, no todos los equilibrios de Nash son equilibrios de perfección en el subjuego. Igualmente, todos los equilibrios hallados mediante retroinducción son equilibrios de perfección en el subjuego, pero no todos los equilibrios de perfección en el subjuego se pueden hallar mediante retroinducción.

Aplicación: La guerra en Yugoslavia

A continuación se analiza un juego en forma extensiva que ayuda a entender el surgimiento de la violencia en el proceso de desintegración de Yugoslavia (Fearon 1998). En concreto, el modelo de James Fearon intenta dar las claves del enfrentamiento que tuvo lugar entre serbios y croatas a raíz de la declaración de independencia de Croacia con respecto a la federación yugoslava.

En el análisis de los conflictos étnicos, se recurre con frecuencia a la cultura y la historia como principales factores explicativos. Así, se supone que la violencia surge como consecuencia de odios ancestrales, de agravios acumulados, o de una tradición larga de luchas entre grupos. Fearon rechaza de plano este tipo de explicaciones, pues lo que se observa a lo largo del tiempo no es un enfrentamiento permanente, sino más bien una sucesión de periodos de lucha y otros de convivencia. Por ejemplo, durante la existencia de la Unión Soviética, nunca hubo violencia étnica en los países del Este de Europa. Si se intercalan periodos de paz y de violencia, la presencia de factores que no varían en el tiempo como los odios ancestrales no pueden dar cuenta del paso de la paz a la violencia y viceversa.

En el modelo que se presenta en esta sección, la clave reside en la credibilidad de las promesas que realizan las partes. Puesto que la guerra yugoslava es extremadamente compleja, el modelo de Fearon aborda tan sólo una de sus dimensiones, la del conflicto entre Serbia y Croacia. Cuando Croacia anuncia su intención de independizarse, se plantea de inmediato un problema grave acerca del futuro que aguarda a la minoría serbia en esta república. Para distinguir a los grupos, llamaremos *M* al grupo mayoritario en Croacia, es decir, la mayoría croata, y *m* a la minoría serbia, concentrada en la región croata de Krajina. El problema que se plantea entonces es el siguiente: *m* no puede creerse la promesa de *M* de que va a respetar los derechos de la minoría, pues por muchas promesas que haga *M*, no hay nada que le impida restringir los derechos de los miembros de *m* una vez que controla el poder. La mayoría croata no tenía forma de garantizar a la minoría serbia que en un futuro Estado independiente iba a respetar sus derechos. Por otro lado, Croacia decidió avanzar por la vía independentista porque, en cuanto minoría dentro de Yugoslavia, no podía creer que una Serbia todopoderosa y nacionalista fuera a respetar sus derechos.

En términos más técnicos, el conflicto deriva de la incapacidad de la mayoría croata para realizar un compromiso *(commitment)* que haga creíble a la minoría que sus derechos van a ser respetados. La idea de "compromiso" la desarrolló por primera vez Thomas Schelling en su libro clásico *The Strategy of Conflict* (1960). Schelling, al analizar los problemas de credibilidad, llegó antes que Selten a las mismas ideas que luego éste sistematizaría en su concepto de equilibrio de perfección en el subjuego. En el capítulo anterior se mencionó un caso de compromiso: al ilustrar el juego del Gallina con los coches que corren uno contra el otro, se explicó que había dos equilibrios asimétricos, y que el equilibrio finalmente seleccionado dependería de cuál de los dos conductores consiguiese hacer creíble al contrario su promesa de no desviarse de su ruta. Una técnica de compromiso consiste en este caso en arrancar el volante y arrojarlo visiblemente, para que el otro comprenda que su rival a partir de ese momento no puede desviarse. En un contexto de negociación, siempre que una de las partes lance un órdago que resulte creíble, el intercambio de ofertas y contraofertas queda

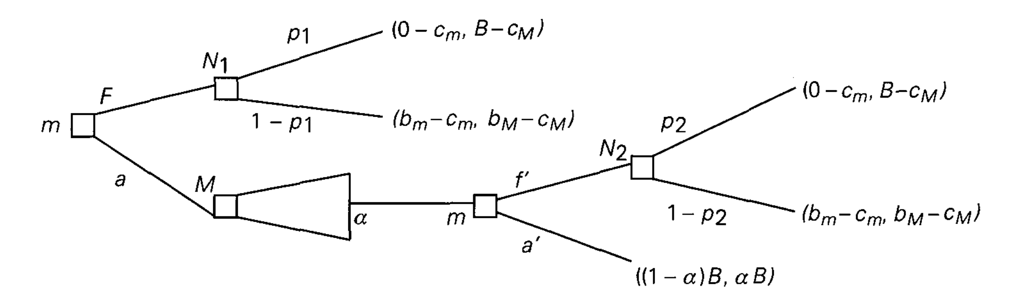
reemplazado por un ultimátum. Desde este punto de vista, un compromiso se puede definir en términos precisos como una manipulación del conjunto de alternativas que permite al agente conseguir un resultado inalcanzable en ausencia del compromiso. "Manipulación" aquí significa dos cosas: o bien que el agente restringe algunas de sus alternativas disponibles, o bien que se impone a sí mismo costes sobre algunas de esas alternativas (Sánchez-Cuenca 1998: 80-81). Cuando Hernán Cortés en la conquista de México quemó sus naves, restringió una de sus alternativas, precisamente la retirada. Cuando alguien anuncia públicamente que va a hacer algo, se autoimpone costes, pues si luego fracasa su reputación queda en entredicho. Si un primer ministro anuncia ante toda la nación que no se va a volver a presentar a las elecciones, es más probable que se vea obligado a terminar haciéndolo aunque no le apetezca que si sólo se lo anuncia a sus más inmediatos colaboradores. En el primer caso, si reniega, queda ante todo el mundo como un embustero.

Pues bien, Fearon plantea en su modelo que los serbios decidieron recurrir a la violencia por la incapacidad de los croatas de realizar un compromiso que garantizara a la minoría que sus derechos serían respetados. Veámoslo con mayor detalle.

Sea B una variable que mide los beneficios políticos y económicos de que los dos grupos del territorio que busca la independencia convivan. Esos beneficios se los pueden repartir de cualquier manera entre los dos grupos. En concreto, representaremos con b_M lo que se lleva la mayoría y con b_m lo que obtiene la minoría. El cuadro 3.12 presenta el árbol del juego en forma extensiva. El primer movimiento corresponde a la minoría serbia, m, que ha de tomar una decisión con respecto al anuncio de creación de un nuevo Estado croata: puede luchar contra su inclusión en el nuevo Estado (estrategia l) o puede aceptar dicha inclusión (estrategia a). Si decide luchar, se inicia una guerra civil, cuyo resultado decide Naturaleza: con probabilidad p_1 gana M y con probabilidad $1 - p_1$ gana m. Si decide entrar en el Estado, entonces M hace una propuesta α para repartirse B entre M y m: α representa la proporción de B que se queda M (a m le resta, por tanto, la proporción $1 - \alpha$). Nótese que esta jugada de M supone que M tiene un continuo de estrategias: esto lo representamos en el juego mediante la recta α que conecta los dos nodos de la estrategia de la mayoría (véase el cuadro 3.12). Una vez que M hace su propuesta de reparto, m tiene que decidir si acepta la propuesta o si lucha por salirse del Estado. Si decide luchar, de nuevo se desemboca en una guerra civil, cuyo resultado vuelve a determinar probabilísticamente Naturaleza, sólo que ahora la probabilidad de que la guerra civil la gane M es p_2 y se va a considerar que $p_2 > p_1$, pues una vez que M controla el aparato del nuevo Estado, tiene más poder y es más probable que venza en la guerra. La guerra tiene unos costes, que no varían con el periodo en el que ésta se produzca (lo que varían son las probabilidades de victoria de las partes). Esos costes los

CUADRO 3.12

EL JUEGO DE FEARON (1998) SOBRE VIOLENCIA ÉTNICA



representamos como c_M y c_m con respecto a la mayoría y la minoría respectivamente.

Para analizar el juego, conviene calcular primero la utilidad esperada de las dos loterías que aparecen. Para la minoría:

$$UE_m(N_1) = p_1(0 - c_m) + (1 - p_1)(b_m - c_m) = -p_1c_m + b_m - c_m - p_1b_m + p_1c_m =$$
$$= (1 - p_1)\, b_m - c_m$$

$$UE_m(N_2) = p_2(0 - c_m) + (1 - p_2)(b_m - c_m) = -p_2c_m + b_m - c_m - p_2b_m + p_2c_m =$$
$$= (1 - p_2)\, b_m - c_m$$

Como $p_2 > p_1$, se sigue inmediatamente que la minoría prefiere hacer la guerra civil al principio que al final, es decir, $UE_m(N_1) > UE_m(N_2)$.

Con respecto a la mayoría, el resultado es justo el inverso:

$$UE_m(N_1) = p_1(B - c_M) + (1 - p_1)(b_M - c_M) = p_1B + (1 - p_1)\, b_M - c_M$$
$$UE_m(N_2) = p_2(B - c_M) + (1 - p_2)(b_M - c_M) = p_2B + (1 - p_2)\, b_M - c_M$$

De nuevo, como $p_2 > p_1$, resulta que la mayoría prefiere hacer la guerra al final que al principio, es decir, $UE_M(N_2) > UE_M(N_1)$.

Para calcular el equilibrio de perfección en el subjuego, procedemos por retroinducción. Si $UE_m(N_2) < 0$, entonces m se conformará con cualquier cosa e incluso si M ofrece $\alpha = 1$, m aceptará ese resultado antes que ir a la guerra. Por el contrario, si $UE_m(N_2) > 0$, M ofrecerá el α más alto que permite que m decida no ir a la guerra. En concreto, M ofrecerá una proporción α^* que satisfaga

$$(1 - \alpha^*)B = (1 - p_2)\, b_m - c_m$$

suponiendo en tal caso que *m* acepta la oferta. Ese valor de α^* es:

$$\alpha^* = \frac{B + c_m - (1 - p_2)\, b_m}{B}$$

Ahora bien, si lo que *m* gana aceptando la oferta es justamente $(1 - p_2)\, b_m - c_m$ (la utilidad esperada de hacer la guerra civil una vez que *m* ha entrado en el nuevo Estado) y resulta que hemos visto que *m* prefiere hacer la guerra civil antes de entrar en el Estado que después de entrar en el Estado ($UE_m(N_1) > UE_m(N_2)$), es evidente que en la primera ronda del juego, *m* decide luchar. La guerra civil se vuelve inevitable. El equilibrio de perfección en el subjuego por tanto se puede formular así, especificando primero las estrategias de *m* y luego las de *M*:

(Luchar en la primera jugada, aceptar α^* en la segunda jugada; ofrecer α^*.)

Recuérdese los valores de α^*:

$$\alpha^* \begin{cases} = 1 \; si \; (1 - p_2)\, b_m - c_m < 0 \\ = \dfrac{B + c_m - (1 - p_2)\, b_m}{B} \; si \; (1 - p_2)\, b_m - c_m > 0 \end{cases}$$

En este contexto, la única manera de evitar la guerra civil sería que *M* prometiera hacer una oferta superior, $\alpha^{**} < \alpha^*$, que indujera a *m* a decidir entrar en el Estado en la primera ronda. El problema es que esa promesa no sería creíble, pues *m* entendería que una vez dentro del Estado, *M* haría la oferta α^*, que es menos generosa, y *m* se vería obligada a aceptarla. En la medida en que *M* no puede hacer un compromiso creíble al inicio del juego de que si *m* entra, *M* luego hará una oferta α^{**} en lugar de la oferta α^*, *m* desencadena la guerra civil en la primera jugada.

Aplicación: La política monetaria y la independencia del banco central

Aunque hasta el momento se ha representado mediante un árbol de decisión la estructura de los juegos en forma extensiva, lo más habitual en este tipo de juegos es que el árbol no se represente. Más bien, se describe la secuencia de movimientos y a continuación se analiza el juego aplicando el método de la retroinducción, como en el ejemplo que a continuación se expone, sobre los problemas de "inconsistencia temporal" en la política monetaria. La inconsistencia temporal (Kydland y Prescott 1977) no es sino otro nombre para referirse a los problemas de credibilidad que surgen en ciertas prome-

sas. Presento a continuación una versión muy simplificada del modelo original de Barro y Gordon (1973).

Hay dos actores en este juego. Por un lado, un Gobierno que tiene preferencias benevolentes, es decir, que persigue la maximización del bienestar social. Por el otro lado, se encuentran los agentes económicos que toman decisiones en el mercado. Los agentes económicos, en este juego, sólo intervienen formándose expectativas. Aunque son muchos, los asimilaremos a un actor colectivo.

La economía en la que se mueven los agentes económicos y el Gobierno se caracteriza por sufrir un problema de externalidades que genera paro. Por ejemplo, puede que los salarios sean demasiado elevados, o que haya impuestos excesivos sobre el trabajo. El Gobierno, como quiere conseguir el mayor bienestar social posible, interviene con el propósito de reducir el paro. Para ello, introduce inflación por sorpresa aumentando la masa monetaria. Esta inflación, en el corto plazo, reduce los salarios reales, estimulándose así la creación de empleo.

Para formalizar las estrategias de los jugadores, se define así la función de utilidad Z del Gobierno:

$$Z = b\,(\pi - \pi^e) - \frac{a}{2}\,\pi^2 \qquad a, b > 0$$

La tasa de inflación real es π; la inflación esperada por los agentes económicos es π^e; b es un parámetro que regula los beneficios que se consiguen con la inflación no esperada (la diferencia entre la real y la esperada); y a mide la sensibilidad del Gobierno a la inflación. Cuanto mayor es b, mayores beneficios produce la inflación por sorpresa; y cuanto mayor a, más importancia se atribuye a la inflación. Esta función de utilidad puede entenderse del siguiente modo: el primer término son los beneficios en términos de creación de empleo, mientras que el segundo son los costes que tiene la creación de empleo en términos de inflación.

Cuando el Gobierno actúa discrecionalmente, sin limitaciones de ningún tipo, intenta maximizar el beneficio social. Para saber cuál será su elección, calculamos las condiciones de primer orden (derivamos la función de utilidad con respecto a π e igualamos a 0):

$$\frac{dZ}{d\pi} = b - \left(\frac{a}{2}\right) 2\pi^* = 0$$

La tasa inflación π^* que satisface esta igualdad es $\pi^* = b/a$. Puesto que la segunda derivada de la función es negativa ($Z'' = -a$), π^* es un máximo. A esta tasa de inflación la vamos a llamar π_d, para que quede claro que se trata de la inflación que corresponde a una decisión discrecional de un Gobierno benevolente.

El problema que se plantea ahora es el siguiente. Si los agentes económicos tienen expectativas racionales, serán capaces de anticipar la decisión del Gobierno y por lo tanto la inflación no les pillará por sorpresa. Es decir, los agentes económicos conocen la función de utilidad del Gobierno y entienden por tanto que éste tiene incentivos para introducir inflación por sorpresa. De ahí que $\pi^e = \pi$. Ahora bien, si se sustituye en la función de utilidad del Gobierno el valor $\pi^* = b/a$ y tenemos en cuenta las expectativas racionales de los agentes, lo que nos queda es

$$Z_d = b\,(\pi_d - \pi^e) - \left(\frac{a}{2}\right)\pi_d^2 = -\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\frac{b^2}{2a}$$

El resultado es negativo. La política discrecional, por lo tanto, genera costes por la capacidad de los agentes de adelantarse a la inflación por sorpresa. Si, en cambio, el Gobierno decidiera seguir una regla que le forzara a perseguir una inflación 0, los agentes económicos anticiparían el resultado de la regla y tendríamos $\pi_r = \pi^e = 0$, donde π_r representa la tasa de inflación que el Gobierno produce si sigue la regla. En este caso, es evidente que se evitan los costes anteriores, pues tenemos

$$Z_r = 0$$

Por tanto, si el Gobierno sigue la regla, el resultado es mejor que si actúa discrecionalmente. La dificultad estriba en que si los agentes creen en la regla, el Gobierno tiene entonces incentivos para desviarse e introducir inflación por sorpresa. De acuerdo con lo que hemos visto anteriormente, el Gobierno se desviaría introduciendo una inflación $\pi_t = b/a$, donde el subíndice t de π_t representa la "tentación" de romper la regla. Pero como los agentes son racionales, anticiparán la actuación del Gobierno y por lo tanto volveremos otra vez a los beneficios negativos.

Con otras palabras, la regla que anuncia el Gobierno no es creíble (no es un equilibrio de perfección en el subjuego) porque el Gobierno tiene incentivos para romperla y los agentes económicos lo saben. En consecuencia, sube la inflación sin que se reduzca el paro, con lo que la sociedad acaba en una situación subóptima. Para salir de esta trampa, los Gobiernos delegan la política monetaria a un banco central independiente cuyo principal objetivo es contener la inflación. De este modo, el Gobierno se ata las manos, pues elimina de sus opciones la posibilidad de introducir inflación por sorpresa en el corto plazo para reducir la tasa de paro. Nótese que este problema de inconsistencia temporal o falta de credibilidad de las promesas ocurre incluso si las preferencias del Gobierno son benevolentes, es decir, incluso si el Gobierno se preocupa realmente por el bienestar de la sociedad.

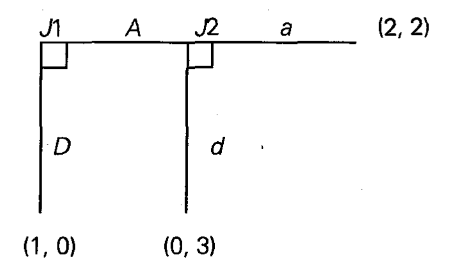
Los límites de la retroinducción y la perfección en el subjuego

Hay ciertos juegos en los que las personas se alejan notablemente de las predicciones teóricas a las que se llega aplicando el criterio de retroinducción o el concepto de equilibrio de perfección en el subjuego. De la misma manera que en el capítulo 2 se vio que en algunos casos el criterio de dominación y los equilibrios de Nash no coinciden con la manera lógica o natural de jugar un juego, también con el concepto de equilibrio de perfección en el subjuego se puede mostrar algo similar.

En este sentido, el juego mejor conocido es el del Ciempiés. Veamos primero una versión reducida de este juego, según aparece en el cuadro 3.13. Comienza jugando J1, que puede acabar inmediatamente con el juego jugando *D*, o seguir adelante, eligiendo *A*. Si elige *A*, interviene J2, que puede jugar hacia abajo, *d*, o seguir adelante, *a*. La aplicación de la retroinducción lleva a una conclusión inmediata: J2, si llega a mover, elegirá *d*, pues con *d* obtiene 3 y con *a* 2. J1, sabiendo esto, juega *D*, por lo cual J1 recibe 1 y J2 0. Sin embargo, los dos podrían haber estado mucho mejor jugando ambos adelante, pues en ese caso cada uno habría sacado 2. J1 es racional jugando *D* porque sabe que de otra manera conseguirá 0, pues no puede creerse la promesa de J2 de que éste va a jugar *a* cuando le toque (dicha promesa no es creíble).

CUADRO 3.13

UNA VERSIÓN REDUCIDA DEL JUEGO DEL CIEMPIÉS

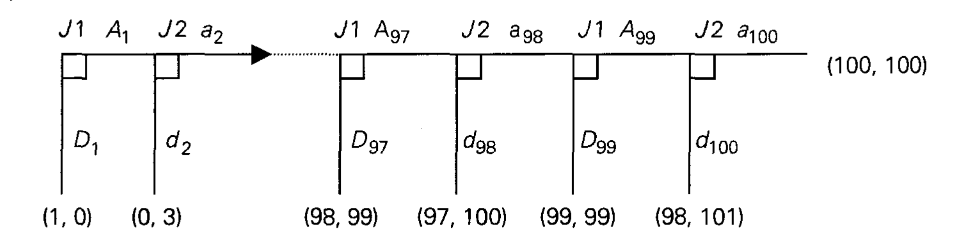


Hasta aquí, todo parece lógico. Pero veamos qué sucede si alargamos el juego y en lugar de dos jugadas representamos cien (de ahí el nombre de Ciempiés), como sucede en el cuadro 3.14. A pesar de que el juego sea más largo y de que las ganancias potenciales al final del juego sean mucho mayores, la conclusión a la que conduce la retroinducción (o la perfección en el subjuego) sigue siendo la misma: en la primera jugada, J1 elige *D* y el juego

se acaba. J1 anticipa que en la ronda última J2 elegirá *d*, no *a*. J2 anticipa que en la ronda penúltima J1 elegirá *D*, no *A*, y así sucesivamente. Si se lleva el razonamiento hasta el final, no hay escapatoria: el juego no se desarrolla porque J1 lo impide en su primera jugada.

CUADRO 3.14

EL JUEGO DEL CIEMPIÉS



Casi nadie queda satisfecho con esta predicción del juego. Parece haber algo absurdo en la imposibilidad de coordinación por parte de los actores. De hecho, en los experimentos de laboratorio con este juego y múltiples variantes del mismo, se observa sistemáticamente que los agentes, habiendo entendido la estructura del juego, no eligen la estrategia de ir hacia abajo hasta muy avanzado el juego. ¿Quiere esto decir que los agentes son irracionales o que la lógica de la retroinducción no refleja adecuadamente la racionalidad?

En este punto surgen diversos problemas metodológicos y filosóficos. Supóngase que a los sujetos en el laboratorio se les comunica que sus rivales no son humanos, sino ordenadores programados para maximizar sus pagos de forma mecánica. Es muy probable que en esas circunstancias, cuando J1 es humano y J2 una máquina, J1 comience haciendo *D* e impidiendo que el juego avance, pues J1 está seguro de que la máquina, en el nodo siguiente, va a elegir *d*. En cambio, cuando tanto J1 como J2 son humanos, la tentación de probar si el rival está dispuesto a colaborar durante algunas rondas y de esta manera conseguir mejores pagos para los dos es muy fuerte. Algunos expertos en teoría de juegos modelizan esta idea de forma un tanto extrema: consideran que el juego nunca tiene información completa, que cada jugador sospecha que hay una pequeña probabilidad de que su rival no esté en sus cabales y elija irracionalmente continuar el juego en lugar de detenerlo (Kreps 1990c: 77-82). Dada esta sospecha sobre la irracionalidad de su rival, si J2 observa que J1 comienza jugando *A*, puede jugar *a* creyendo que J1 es irracional, con la expectativa de que J1 va a seguir jugando *A* en el futuro. Lo interesante es que incluso si J1 no es irracional, puede que le convenga

hacerse pasar por tal (según se explica con más detalle al final del capítulo 5), para poder continuar de este modo con el juego y garantizar ganancias mayores.

Esta reconstrucción del juego del Ciempiés resulta un poco forzada. Si las personas colaboran en este juego no es porque sospechen que el rival puede ser irracional, sino porque están convencidos de que la racionalidad consiste en no desperdiciar la oportunidad de aumentar las ganancias en un juego de esta naturaleza. Parece que cuando J1 empieza jugando *A* en lugar de *D*, J2 entiende la "señal", entiende que J1 está comunicando que no le parece razonable la solución de perfección en el subjuego y que por tanto está dispuesto a mantener durante un cierto número de rondas una cadena de cooperación condicional, por la que J1 juega *A* a cambio de que J2 vaya jugando también *a* (Rowe 1989: 44-57). El problema está en que la teoría de juegos no ha sido capaz hasta el momento de dar cuenta de este tipo de razonamientos de los agentes.

En suma, el procedimiento de la retroinducción, o en general el equilibrio de perfección en el subjuego, supone un avance notable con respecto a la indefinición del equilibrio de Nash acerca de qué cuenta como forma razonable de jugar un juego, eliminando del equilibrio propuesto todas aquellas estrategias basadas en promesas o amenazas increíbles. Con todo, esta noción más exigente de equilibrio no funciona siempre de acuerdo con lo que el sentido común o nuestras intuiciones más básicas sobre la acción racional establecen. El criterio de eliminar repetidamente estrategias dominadas puede llevar a conclusiones poco plausibles, como se ha visto en el caso del Ciempiés, lo que demuestra que esta noción de equilibrio no agota o no cubre todo lo que entendemos por la racionalidad de la acción.

4

Juegos repetidos

La naturaleza de los juegos repetidos

Hasta el momento se han estudiado juegos estáticos y juegos dinámicos. Los primeros corresponden a los juegos en forma normal, en los que las decisiones o bien se toman simultáneamente o bien se toman sin conocimiento de lo que han elegido los demás, mientras que los segundos corresponden a los juegos en forma extensiva. Los juegos en forma extensiva son dinámicos porque hay una secuencia u orden de movimientos y por lo tanto podemos describir la "historia" de los movimientos de los jugadores.

Los juegos repetidos consisten en que una estructura de interacción estratégica se repita a lo largo del tiempo. Dicho de otra manera: un juego repetido es un juego que se juega más de una vez. El juego que se repite puede ser en forma normal o en forma extensiva. En lenguaje técnico, al juego que se repite se le suele llamar el "juego de referencia" *(stage game)*. Por ejemplo, podemos considerar qué sucede si el Dilema del Prisionero (DP) se repite a lo largo del tiempo, es decir, si los actores en cada periodo de tiempo tienen que jugar un DP. El juego de referencia en cada fase o en cada etapa es el mismo, pero analizado globalmente, desde la perspectiva del tiempo, el equilibrio o los equilibrios del juego repetido no tienen por qué coincidir con los equilibrios del juego de referencia considerado en un único momento.

Cuando un juego se repite, pueden surgir *estrategias condicionales*. En una estrategia condicional, un jugador elige una u otra estrategia en función de lo que su rival haya hecho hasta el momento. El jugador condiciona su estrategia a lo que haga el otro jugador. La existencia de estrategias condicionales es lo que produce la aparición de nuevos equilibrios con respecto al juego de referencia. En el juego repetido *puede* haber equilibrios distintos a los equilibrios del juego de referencia porque cabe elegir estrategias condicionales, cosa que es imposible en el juego de referencia jugado una sola vez.

Al analizar los juegos repetidos, lo que se pretende es averiguar si hay equilibrios nuevos basados en estrategias condicionales que no existen en el juego de referencia. En este sentido, resulta fundamental la diferencia entre juegos repetidos un número determinado de veces y juegos repetidos indefi-

nidamente. Cuando hay un final conocido por ambos jugadores, la repetición del juego apenas cambia nada, mientras que si no hay un final establecido, es decir, si el juego va a seguir jugándose siempre (o no se sabe cuándo va a acabar), los equilibrios del juego repetido son muy distintos con respecto a los del juego de referencia.

Hay multitud de situaciones en las que los actores interactúan de forma continuada a lo largo del tiempo: dos países que año tras año deciden sus niveles de apertura comercial (subiendo o bajando los aranceles), la interacción continuada entre un Estado y una organización terrorista, la relación que se establece a lo largo del tiempo entre un partido político y sus seguidores o votantes, etcétera. Veamos este último caso. Se ha dicho una y otra vez, desde Anthony Downs (1957) en adelante, que la celebración periódica de elecciones ejerce una poderosa influencia sobre la acción de los partidos que llegan al Gobierno: una vez elegidos, los partidos y sus miembros podrían desentenderse de las promesas realizadas en campaña y dedicarse a enriquecerse personalmente o a disfrutar de los múltiples privilegios que entraña el ejercicio del poder político. En las democracias no hay ningún mecanismo legal que obligue a los partidos a cumplir sus programas. Pero si actuaran al margen de sus programas, saben que comprometerían sus posibilidades futuras de ser reelegidos (los votantes los castigarían). Si quieren permanecer en el poder o seguir teniendo expectativas de volver a ganar las elecciones, los partidos no pueden desviarse demasiado de lo que prometieron a sus electores, pues éstos condicionarán su voto futuro a la gestión pasada de los partidos (Alesina 1988).

El tiempo y el factor de descuento

Cuando se hacen cálculos sobre los pagos que reciben los jugadores en cada periodo, ronda o repetición del juego, hay que tener en cuenta que el tiempo no pasa en balde. No siempre podemos suponer que la utilidad final que obtiene cada jugador sea simplemente la suma de los pagos conseguidos en cada periodo. Esto es así por dos razones, una técnica y otra sustantiva, que se complementan entre sí.

La razón técnica es que si el juego se juega indefinidamente, la suma de los pagos en cada periodo da una cantidad infinita. Es decir, si en cada periodo el jugador recibe un pago de 2 unidades de utilidad, el pago total en un juego de estas características es infinito. La utilidad será infinita positiva con cada estrategia que proporcione pagos mayores que 0, en cuyo caso no se puede distinguir entre los resultados que producen las distintas estrategias. Esto, evidentemente, no tiene sentido.

La razón sustantiva se puede expresar de varias maneras, aunque la idea subyacente es siempre la misma: un pago futuro idéntico en cantidad a un

pago presente lo valoramos menos (nos proporciona menos utilidad) que el pago presente. Entre recibir un euro hoy y recibirlo dentro de un año, preferimos recibirlo hoy. Esto puede ser o bien porque el agente sea impaciente (tal vez porque realmente necesite ya ese dinero), o bien porque tema el futuro, que se presenta incierto (quizá tema que el juego pueda acabarse en el periodo siguiente). En el caso de que los pagos sean monetarios, la justificación está más clara todavía: si me dan el euro, lo puedo invertir para que me proporcione algún tipo de interés. En cambio, si el euro lo recibo al cabo de un año, durante el año de espera he dejado de ganar el beneficio que podría haber conseguido de haber dispuesto de ese euro desde el comienzo.

A fin de entender cómo se produce esta pérdida en valor presente de un pago futuro conforme el pago se aleja en el tiempo, suponemos que el pago es monetario. De esta manera, podemos ser más precisos, introduciendo la tasa de interés. Sea una tasa de interés, r, del 1%. Esto significa que si una persona hoy ingresa en el banco 100 euros, al cabo de un año tiene 101 ($101=100(1 + r)$, $r = 0{,}01$). Por tanto, esa persona no puede ser indiferente entre recibir 100 euros hoy y recibir 100 dentro de un año. Será indiferente más bien entre recibir hoy 100 euros y recibir dentro de un año 101 euros. La tasa de interés r la podemos entender más en general como *tasa de descuento* y se puede interpretar como la cantidad extra de una unidad de pago que necesito para compensar el retraso con el que recibo el pago. En el ejemplo, la tasa de descuento sería de 0,01 euros por euro.

Esta misma idea se puede reflejar de manera alternativa: en lugar de establecer cuánto tendría que aumentar el pago futuro para que el agente fuera indiferente entre recibir el pago hoy y recibirlo en el próximo periodo, podemos calcular cuánto valora el agente en el presente un pago futuro. Esto lo conseguimos mediante el *factor de descuento* δ, que definimos como $\delta = \frac{1}{1+r}$. Así, un pago de 100 euros dentro de un periodo de un año valdría hoy $100\left(\frac{1}{1+0{,}01}\right) = 100*0{,}99 = 99$ euros. El pago futuro, expresado en valor presente, sufre un descuento o una depreciación. Cuanto mayor sea la tasa de descuento, menor es el factor de descuento, lo que implica, dado que δ varía entre 0 y 1, que más valor descontamos con el paso del tiempo. Si δ está próximo a 1 (y r por tanto próximo a 0), como en el ejemplo que estamos usando, eso significa que el descuento es muy pequeño. Si δ se aleja de 1 y se acerca hacia el 0, el agente descuenta mucho el futuro: es muy impaciente o su incertidumbre sobre el final del juego es muy alta.

Aquí vamos a utilizar el factor de descuento δ, dejando a un lado la tasa de descuento. Lo que queda por resolver ahora es cómo se descuenta el valor para periodos más alejados en el tiempo que el periodo siguiente. Recuérdese que el valor de δ es el factor de descuento aplicado al periodo inmediato al

presente. Cuando se consideran varios (o infinitos) periodos futuros, hay que decidir la forma en la que se aplica δ. El supuesto que casi siempre se emplea en la teoría de juegos es que *el descuento es exponencial*, de tal manera que el valor presente de un pago π es $\delta^0\pi$ en t=0, $\delta^1\pi$ en t=1, $\delta^2\pi$ en t=2, $\delta^3\pi$ en t=3 y así sucesivamente. Matemáticamente, el descuento exponencial para un periodo infinito se puede representar con respecto a un pago cualquiera π así:

$$\delta^0\pi + \delta^1\pi + \delta^2\pi + ... = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t\pi$$

Esta suma no es infinita, sino que converge en una cantidad determinada siempre que $0 < \delta < 1$. Con ello se resuelve la dificultad técnica antes apuntada de que en un juego indefinido los pagos a lo largo del tiempo se vuelvan infinitos. Veamos por qué esto es así. Supongamos primero, para el caso más sencillo, que $\pi = 1$. En tal caso, la serie converge del siguiente modo:

$$1 + \delta + \delta^2 + ... = \frac{1}{1 - \delta}$$

Se puede demostrar así: si δ está acotado entre 0 y 1, en cada periodo sucesivo, al ser elevado a un exponente cada vez mayor, se vuelve más pequeño, con lo que cada nuevo término de la serie será más pequeño, garantizando la convergencia. Para determinar el valor concreto en que converge, supongamos por el momento que ese valor es s. Sacando factor común en la serie, llegamos a la siguiente formulación:

$$s = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + ... = 1 + \delta(1 + \delta + \delta^2 + ...) = 1 + \delta s$$

Por tanto, si pasamos δs a la izquierda restando y sacamos factor común:

$$s(1 - \delta) = 1$$

Ahora sólo falta despejar s:

$$s = \frac{1}{1 - \delta}$$

Si π es cualquier otra cantidad que no sea 1, entonces, aplicando la misma lógica, la serie converge de esta forma:

$$\pi + \delta\pi + \delta^2\pi + \delta^3\pi + ... = \frac{\pi}{1 - \delta}$$

La demostración sigue los mismos pasos que la anterior. Por último, es conveniente conocer el siguiente caso especial, en el que la serie comienza no en el presente, sino en el primer periodo futuro:

$$\delta\pi + \delta^2\pi + \delta^3\pi + \ldots = \frac{\delta\pi}{1-\delta}$$

Una vez expuesta la idea del descuento exponencial del futuro, podemos pasar a analizar los juegos repetidos.

Juegos repetidos *n* veces

La teoría de los juegos repetidos *n* veces se basa en un resultado o proposición básica. Si el juego de referencia que se repite tiene un único equilibrio de Nash, entonces el único equilibrio de Nash en el juego repetido es el equilibrio original del juego de referencia. Por tanto, la repetición del juego un número fijo de veces no altera el equilibrio original, no introduce cambio alguno. Así, un DP repetido cinco veces se juega igual que un DP jugado una sola vez. No hay posibilidad de que surjan estrategias condicionales.

La lógica que hay detrás de este resultado es la retroinducción. Situémonos en la última ronda o periodo del DP, en la quinta ronda. Es evidente que como el juego no va a continuar, la única elección racional consiste en elegir la estrategia dominante, "defraudar". Los dos jugadores defraudan en la ronda final. En la ronda final el DP se juega igual que si se jugara una sola vez. En la cuarta ronda, los jugadores son capaces de anticipar qué va a suceder en la última ronda, y sabiendo por tanto que el otro va a defraudar en la quinta ronda, entienden que lo mejor que pueden hacer en la cuarta ronda es defraudar también. No tiene sentido que se planteen cooperar en la cuarta ronda para condicionar la cooperación del rival en la siguiente ronda, pues cada uno sabe que el otro defraudará con seguridad en la ronda última, no teniendo ninguno incentivos para cooperar por mucho que el otro haya cooperado en el pasado. Pero este mismo razonamiento se puede trasladar a la tercera ronda. Ahora J1 y J2 saben que ambos van a defraudar en las rondas cuarta y quinta, con lo que de nuevo deciden defraudar. Llegamos así hasta la primera ronda, en la que los dos jugadores defraudan.

Es la expectativa de lo que va a ocurrir en la última ronda del juego repetido lo que arruina la posibilidad de que aparezca alguna forma de cooperación condicional entre los jugadores. Al sacar las consecuencias lógicas del conocimiento cierto de que en la última ronda los dos van a defraudar, los jugadores inician el juego en la primera ronda defraudando. Se trata del mismo argumento que se aplicaba en el caso del juego del Ciempiés. La conclusión es la misma ya se repita el juego dos veces o mil. Incluso cuando el

juego se juega durante mil periodos, es la certidumbre sobre lo que va a suceder en la ronda mil lo que impide que en las 999 rondas anteriores pueda haber alguna forma de cooperación condicional.

Ahora bien, de la misma manera que en el caso del Ciempiés el criterio de retroinducción va demasiado lejos, pues en la práctica las personas apoyan cadenas de cooperación durante buena parte del juego, en el caso del DP o de cualquier otro juego repetido *n* veces, también la predicción de la teoría se aleja mucho de lo que se observa experimentalmente. Se ha comprobado de forma sistemática que la gente está dispuesta a cooperar en un DP repetido *n* veces, no haciendo caso al argumento retroinductivo de que si se anticipa que en la última ronda se va a defraudar, entonces no compensa cooperar antes (Rapoport y Chammah 1970). En el capítulo 5 se examina la forma en que la teoría de juegos se puede reconciliar con la realidad considerando que no hay información completa, es decir, que los jugadores no están completamente seguros acerca de la naturaleza del rival con el que se enfrentan.

En cualquier caso, este resultado tan poco convincente sólo sirve si el juego de referencia que se repite *n* veces tiene un único equilibrio de Nash. Si el juego de referencia tiene equilibrios múltiples, pueden surgir estrategias condicionales, aunque a veces dan lugar a equilibrios poco razonables. Como se trata de una cuestión técnica, se recomienda la lectura de un trabajo algo más avanzado (Gibbons 1992: 82-88).

El Dilema del Prisionero repetido indefinidamente

El DP es uno de los juegos que, como se vio en el capítulo 2, refleja el problema de la cooperación. Este juego tiene la configuración de los pagos más desfavorable posible para la cooperación, pues la estrategia de defraudar domina fuertemente a la estrategia de cooperar. Hay muchas situaciones sociales y políticas que quedan representadas por el DP. Si elegimos el DP no es sólo porque se dé con frecuencia, sino porque el análisis de lo que sucede cuando se repite contribuye a disipar en parte la sospecha de que hay algo paradójico o absurdo en la conclusión de que la racionalidad individual siempre obliga en un DP a sacrificar las ganancias colectivas por las personales. Este aire de paradoja consiste en que al final los dos jugadores están peor que si no hubiesen actuado según los dictados de dicha racionalidad individual. Sin embargo, la paradoja sólo se da cuando el DP no se repite.

A fin de refrescar el problema, en el cuadro 4.1 se reproduce de nuevo el DP, definido como un orden de preferencias particular con relación al juego genérico de la cooperación. La estrategia D domina a C porque $T > R$ y $P > S$. En consecuencia, el único equilibrio de Nash es (D, D).

CUADRO 4.1

EL DILEMA DEL PRISIONERO

		J2 C	J2 D
J1	C	R, R	S, T
	D	T, S	P, P

R = recompensa
T = tentación
P = penalización
S = "sucker" (hacer el primo)
Orden de preferencias: $T > R > P > S$

Si el juego se repite indefinidamente, el DP pasa a tener infinitos equilibrios. En lugar de entrar en la demostración de este sorprendente resultado, examinamos simplemente algunos de los equilibrios posibles, centrándonos en uno especialmente interesante, el equilibrio basado en la estrategia toma-y-daca (o tal-para-cual, en inglés *tit-for-tat*).

En primer lugar, el equilibrio original del juego de referencia se mantiene como equilibrio del juego repetido indefinidamente. Esto implica que una posibilidad de jugar el juego consiste en que ambos defrauden permanentemente. Si J1 espera que J2 responda a la cooperación defraudando, y J2 espera lo mismo de J1, ninguno de los dos tiene razones para cooperar: sus expectativas se refuerzan mutuamente y hacen que defraudar sea la respuesta óptima frente a la elección de defraudar del otro. Los pagos esperados de ambos jugadores en este equilibrio son

$$P + \delta P + \delta^2 P + \delta^3 P + \ldots = \frac{P}{1 - \delta}$$

Resulta chocante que esto pueda ser un equilibrio, pues es evidente que si cooperasen entre sí podrían conseguir pagos más altos. Sin embargo, éste es el resultado más lógico si domina la desconfianza entre los jugadores. La combinación opuesta de estrategias, cooperar siempre, no es un equilibrio de Nash ni en el juego de referencia ni en el juego repetido indefinidamente. Si en la versión repetida J1 espera que J2 vaya a cooperar siempre, la mejor respuesta posible de J1 a esa expectativa no es cooperar también, sino defraudar. Si los dos jugadores jugaran la estrategia de cooperar siempre, el pago esperado de cada uno sería $\frac{R}{1 - \delta}$. Pero cada uno podría estar mejor

defraudando siempre si el otro jugara esta estrategia de cooperar siempre. En concreto, si J1 defraudara siempre mientras que J2 coopera siempre, J1 obtendría $\frac{T}{1-\delta}$, siendo $\frac{T}{1-\delta} > \frac{R}{1-\delta}$, puesto que hemos partido de un orden de preferencias en el que $T > R$. Por tanto, J1 tendría un incentivo para desviarse del par de estrategias cooperar siempre, con lo que cooperar siempre no puede ser un equilibrio de Nash.

Tanto las estrategias de defraudar siempre como cooperar siempre son incondicionales. La acción del jugador no depende de lo que haya hecho hasta el momento el rival. La primera estrategia, defraudar siempre, es un equilibrio, mientras que la segunda, cooperar siempre, no lo es. Aparte de estas dos estrategias incondicionales, hay una infinidad de estrategias condicionales posibles. Son estas estrategias condicionales las que expanden el espacio de equilibrios posibles.

Veamos algunos ejemplos de estrategias condicionales. Sea la estrategia "desoladora" *(grim-trigger strategy)* que consiste en empezar cooperando, seguir cooperando siempre que el rival coopere y, en caso de que en algún momento el rival defraude, defraudar siempre a partir de ese momento. Para determinar si esta estrategia, jugada por ambos jugadores, constituye un equilibrio, hay que averiguar si dados los pagos que produce, alguno de los jugadores tendría alguna razón para desviarse de la misma. Si los dos jugadores juegan la estrategia desoladora, ambos comienzan cooperando y siguen cooperando indefinidamente, sin necesidad de que tengan que poner en práctica el castigo que se contiene en su estrategia (defraudar siempre en caso de que el rival defraude en una ocasión). Los pagos que obtendrían serían por tanto $\frac{R}{1-\delta}$. Para ver si alguno de los jugadores tiene incentivos para desviarse de su estrategia, hay que comparar el pago que obtendría desviándose de la misma con el pago que acabamos de ver que obtendría si siguiera jugando la estrategia desoladora. Supongamos que J1 en un periodo cualquiera t defrauda. En t, J1 recibe el pago máximo, T, el pago de la tentación, pero a partir de ese momento, a partir de $t + 1$, sabe que J2 va a defraudar siempre y por lo tanto lo mejor que puede hacer J1 a partir de $t + 1$ es defraudar siempre. Esquemáticamente, la historia del juego se representa en el cuadro 4.2.

Ahora puede especificarse bajo qué condiciones a J1 no le compensa desviarse de la estrategia desoladora. En concreto, no le compensa cuando el pago esperado de continuar jugando la estrategia desoladora es superior al pago esperado de desviarse una vez, es decir cuando:

$$\frac{R}{1-\delta} > T + \frac{\delta P}{1-\delta}$$

CUADRO 4.2

UNA DESVIACIÓN DE J1 EN t DE LA ESTRATEGIA DESOLADORA

	$t-1$	t	$t+1$	$t+2$	...	Pago esperado a partir de t
J1	C	D	D	D	...	$T + \delta P + \delta^2 P + ... = T + \frac{\delta P}{1-\delta}$
J2	C	C	D	D	...	$S + \delta P + \delta^2 P + ... = S + \frac{\delta P}{1-\delta}$

De lo que se trata es de despejar δ en esta ecuación. Esto lo podemos hacer de la siguiente manera: multiplicamos a ambos lados por $(1 - \delta)$ para librarnos de las fracciones y luego ponemos en un lado todos los términos que multiplican a δ y en otro todos los términos que están libres de δ:

$$R > T(1 - \delta) + \delta P$$

$$R > T - \delta T + \delta P$$

$$\delta T - \delta P > T - R$$

$$\delta(T - P) > T - R$$

$$\delta > \frac{T-R}{T-P}$$

Como el juego es simétrico y consideramos, por simplicidad, que ambos jugadores tienen igual factor de descuento, podemos concluir que siempre que los jugadores sean suficientemente pacientes, es decir, siempre que $\delta > \frac{T-R}{T-P}$, la estrategia desoladora, que es una estrategia condicional, configura un equilibrio. Lo que esto significa es que si cada uno de los jugadores juega la estrategia desoladora y su factor de descuento es superior a la cantidad indicada, ninguno de los dos tiene incentivos para desviarse.

La estrategia desoladora es sólo una de las infinitas estrategias condicionales posibles. Hay innumerables variaciones de la estrategia desoladora. Por ejemplo, empezar cooperando, seguir cooperando mientras el otro vaya cooperando, y en caso de que el otro defraude una vez, castigarle a partir de entonces defraudando en las 1.423 rondas siguientes. De nuevo, si el factor de descuento satisface cierta condición, esa estrategia puede ser un equilibrio.

Entre todas las variantes de la estrategia desoladora, hay una que destaca claramente, la estrategia toma-y-daca, identificada por primera vez por Anatol Rapoport. Esta estrategia se puede formular así:

(1) El jugador comienza cooperando en la primera ronda.
(2) En todas las demás rondas, el jugador hace lo que hizo su rival en la ronda anterior.

De esta forma, el jugador coopera en la ronda t si su rival cooperó en la ronda $t - 1$, y defrauda en t si su rival defraudó en $t - 1$. Supongamos que el rival, J2, defraudó en $t - 1$. Entonces, J1 defrauda en t. Si en t J2 coopera, J1 coopera en $t + 1$; si J2 defrauda en t, J1 vuelve a defraudar en $t + 1$, y así sucesivamente.

¿Qué relación guarda toma-y-daca con la estrategia desoladora? Toma-y-daca es una variante de la estrategia desoladora porque, al igual que ésta, produce cooperación mientras el rival coopera, distinguiéndose en que el castigo que aplica cuando el rival defrauda es el más suave posible, defraudar en la siguiente ronda, mientras que con la estrategia desoladora el castigo es el máximo posible, defraudar siempre.

¿Bajo qué condiciones es un equilibrio que los dos jugadores jueguen la estrategia toma-y-daca? La respuesta es: cuando continuar jugando toma-y-daca sea mejor que desviarse de esta estrategia. A diferencia de lo que ocurría con la estrategia desoladora, ahora hay que ser más precisos acerca de lo que supone una desviación. Cabe imaginar dos desviaciones extremas: una que sea desviarse sólo en una ronda de toma-y-daca defraudando una vez después de que el rival haya cooperado en la ronda anterior y volviendo luego a la estrategia original; otra que sea desviarse para siempre, defraudando de forma permanente a partir de la primera desviación. Si se demuestra que bajo ciertas condiciones toma-y-daca produce mejores resultados que cualquiera de estas dos desviaciones, es que toma-y-daca es un equilibrio. En rigor, habría que demostrar también que así como no compensa ni una ni infinitas desviaciones, tampoco compensa un número intermedio n de veces, $1 < n < \infty$ (véase Morrow 1994: 265-266).

Siguiendo el procedimiento del cuadro 4.2, comenzamos por la primera desviación, defraudar una sola vez cuando el rival ha cooperado en la ronda anterior, aceptar el castigo posterior del rival para poder restaurar la cooperación, y volver a partir de ese momento a toma-y-daca. Supondremos que es J1 el que se desvía. En $t - 1$ los dos jugadores, coherentes con toma-y-daca, cooperan. Pero en t J1 juega D desviándose de toma-y-daca, mientras que J2 vuelve a cooperar en t: en consecuencia, en t J1 obtiene el pago T y J2 el pago S. En la ronda siguiente, $t + 1$, J1 coopera y recibe el castigo de J2, que defrauda: J1 obtiene S y J2 T. Es en $t + 2$ donde J1 admite cooperar (a pesar de que J2 ha defraudado en $t + 1$) para restablecer la cadena de cooperación condicional, manteniendo de ahí en adelante su cooperación. Nótese que J2 en ningún momento se desvía de toma-y-daca, pues como se observa en el cuadro 4.3 siempre hace lo que hizo su rival en la ronda anterior.

CUADRO 4.3

UNA ÚNICA DESVIACIÓN DE J1 EN t DE TOMA-Y-DACA

	$t-1$	t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	...	Pago esperado a partir de t
J1	C	D	C	C	C	...	$T+\delta S+\delta^2 R+\delta^3 R+\ldots$
J2	C	C	D	C	C	...	$S+\delta T+\delta^2 R+\delta^3 R+\ldots$

Cuando no hay desviación, es decir, cuando ambos jugadores mantienen la cooperación condicional producida por toma-y-daca, los pagos esperados a partir del momento t son:

$$R+\delta R+\delta^2 R+\delta^3 R+\ldots$$

Hay que determinar cuándo esos pagos esperados son superiores a los pagos esperados correspondientes a una desviación, tal y como se describen en la fila de J1 del cuadro 4.3:

$$T+\delta S+\delta^2 R+\delta^3 R+\ldots$$

Pues bien, es evidente que:

$$R+\delta R+\delta^2 R+\delta^3 R+\ldots > T+\delta S+\delta^2 R+\delta^3 R+\ldots$$

Cuando:

$$R+\delta R > T+\delta S$$

El resto de ambas series es idéntico y podemos por tanto suprimirlo. En esta desigualdad podemos aislar el factor de descuento:

$$\delta > \frac{T-R}{R-S}$$

Si se cumple esta desigualdad, ninguno de los dos jugadores tiene incentivos para desviarse una sola vez de toma-y-daca.

Ahora hay que aplicar un razonamiento equivalente para el caso de una desviación permanente, en virtud de la cual J1 comienza a defraudar en t y no para ya de defraudar. La situación aparece representada en el cuadro 4.4. Ahora J1 no está dispuesto a restablecer la cooperación condicional y continúa defraudando, lo que provoca que J2, imitando el comportamiento de su rival en la ronda anterior, también defraude.

CUADRO 4.4

UNA DESVIACIÓN PERMANENTE DE J1 DE TOMA-Y-DACA A PARTIR DE *t*

	$t-1$	t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	...	Pago esperado a partir de t
J1	C	D	D	D	D	...	$T+\delta P+\delta^2 P+\delta^3 P+\ldots = T+\dfrac{\delta P}{1-\delta}$
J2	C	C	D	D	D	...	$S+\delta P+\delta^2 P+\delta^3 P+\ldots = S+\dfrac{\delta P}{1-\delta}$

El pago esperado a partir de t de defraudar permanentemente es para J1, según puede verse en el cuadro 4.4, $T + \frac{\delta P}{1-\delta}$. Por otro lado, el pago esperado para J1 de mantenerse en toma-y-daca es el pago correspondiente a la cooperación mutua indefinida:

$$R + \delta R + \delta^2 R + \delta^3 R + \ldots = \frac{R}{1-\delta}$$

De lo que se trata es de averiguar bajo qué condiciones es verdad que este pago esperado es superior al pago esperado de desviarse para siempre a partir de t:

$$\frac{R}{1-\delta} > T + \frac{\delta P}{1-\delta}$$

De nuevo, lo que interesa es aislar el valor de δ. Seguimos el mismo procedimiento que antes, comenzamos eliminando la naturaleza fraccional de algunos elementos de la inecuación:

$$R > T(1-\delta) + \delta P$$

Volvemos a distribuir términos y a agrupar en un lado todos los que contienen δ:

$$\delta T - \delta P > T - R$$

Ahora sacamos factor común en el lado izquierdo y despejamos δ, quedando:

$$\delta > \frac{T-R}{T-P}$$

Cuando se cumpla esta desigualdad, J1 está mejor siguiendo con toma-y-daca que desviándose permanentemente.

Llegados a este punto, podemos poner juntas las dos condiciones para que toma-y-daca sea un equilibrio. Tiene que ser cierto a la vez que:

$$\delta > \frac{T-R}{R-S} \quad \text{y} \quad \delta > \frac{T-R}{T-P}$$

Más formalmente, esto se puede expresar así:

$$\delta > \max\left(\frac{T-R}{R-S}, \frac{T-R}{T-P}\right)$$

La clave de ambas condiciones es que los jugadores han de ser lo suficientemente pacientes para poder valorar en mayor medida el mantenimiento de la cooperación condicional a largo plazo que la obtención de un beneficio en el corto plazo a costa de engañar al rival y destruir por un tiempo o para siempre la posibilidad de restablecer la cadena de cooperación. Si los jugadores son pacientes, su factor de descuento es alto, resultando más fácil satisfacer las desigualdades anteriores.

En cualquier caso, ¿qué tiene de especial toma-y-daca frente a otras estrategias condicionales? Robert Axelrod, en su libro *La evolución de la cooperación* (1984), realizó un torneo de liguilla entre estrategias para un DP repetido indefinidamente. Los participantes en la liguilla enviaban lo que creían que sería la mejor estrategia posible, la estrategia que maximizaría los pagos. Axelrod tradujo todas esas estrategias a un lenguaje de programación y puso a competir a cada estrategia contra todas las demás. Cada estrategia jugaba doscientas rondas del DP con cada una de las otras estrategias. La estrategia ganadora fue precisamente toma-y-daca. De todas las estrategias propuestas, toma-y-daca era la más sencilla. Según Axelrod, las razones de este éxito inesperado de toma-y-daca se explican por algunas de las características que tiene esta estrategia. Primero, es una estrategia *decente*, entendiendo por decencia que comienza cooperando, que no es la primera en defraudar. Segundo, es una estrategia *indulgente*, en el sentido de que reinicia la cooperación con relativa rapidez tras haber defraudado el rival. Tercero, es una estrategia *vengativa*, puesto que si su rival defrauda, no pasa por alto esa ofensa y defrauda también. Cuarto, es además una estrategia *clara*, cuyo funcionamiento es transparente y fácil de entender. Esta combinación de características hicieron de toma-y-daca la estrategia ganadora en el torneo organizado por Axelrod.

No obstante, para que toma-y-daca tenga éxito es necesario que haya otras estrategias decentes. Toma-y-daca obtiene muy buenos resultados si se apoya en otras estrategias decentes con las que pueda establecer relaciones

duraderas de cooperación condicional. En cambio, funciona peor frente a estrategias no decentes: por ejemplo, frente a una estrategia que comience defraudando y a continuación coopere salvo que el otro defraude, en cuyo caso defrauda para siempre, se produce una secuencia indefinida de defecciones mutuas, pues en la primera ronda toma-y-daca coopera y la otra defrauda, en la segunda ronda toma-y-daca defrauda y la otra coopera, y a partir de ahí la otra ya defrauda siempre.

Que toma-y-daca tenga propiedades tan atractivas no significa necesariamente que cuando los jugadores jueguen un DP vayan a seleccionar el equilibrio correspondiente a toma-y-daca. Al fin y al cabo, toma-y-daca es tan sólo un equilibrio posible dentro de un conjunto infinito de equilibrios. Sus propiedades hacen de toma-y-daca un punto focal, es decir, un candidato natural a constituirse en el equilibrio seleccionado, pero eso no es garantía suficiente para convencernos de que el equilibrio final se basará en toma-y-daca. Al fin y al cabo, no es evidente que todo jugador racional haya de ser consciente de las características especiales de toma-y-daca. Por otra parte, cuando observamos casos reales de cooperación condicional exitosa, es difícil saber qué estrategias están sosteniendo la cooperación. Nótese que cualquier variante de la estrategia desoladora, incluyendo a toma-y-daca y a la propia estrategia desoladora, produce cooperación condicional. La cooperación condicional es compatible o sostenible con múltiples estrategias posibles.

Ante los resultados del análisis del DP repetido indefinidamente, podría pensarse que la presencia en muchas sociedades de un grado de cooperación elevado se debe al uso de estrategias condicionales. Sin embargo, estrategias como toma-y-daca sólo son un equilibrio cuando el DP lo juegan unas pocas personas. En cambio, las formas de cooperación colectiva en la sociedad, cuando se dan, suelen involucrar a un gran número de jugadores. Conforme aumenta el número de jugadores que interviene en un DP, las posibilidades de que surja cooperación condicional disminuyen rápidamente, por mucho que se repita el juego y por muy pacientes que sean los jugadores. Si el grupo es muy grande, el único equilibrio realista de un DP jugado entre todos los miembros del grupo consiste en que todos defrauden permanentemente. Lo mismo sucede, por cierto, si en lugar de conjeturar un DP con muchos jugadores, nos imaginamos un conjunto grande de jugadores que en cada ronda se emparejan de dos en dos y cada pareja juega un DP. Conforme aumenta el tamaño del grupo, la probabilidad de volver a encontrarse con el mismo jugador disminuye, lo que equivale técnicamente a una reducción del factor de descuento, empeorando por tanto las condiciones para que surja la cooperación condicional (Calvert 1995).

El teorema popular

Hasta el momento, hemos visto que cuando el DP se juega indefinidamente, surgen equilibrios de Nash múltiples (la estrategia desoladora y sus variantes). Se puede demostrar que la repetición indefinida afecta igual a todos los juegos, no sólo al DP. En concreto, el llamado "teorema popular" *(the folk theorem)* demuestra que los juegos repetidos indefinidamente tienen múltiples equilibrios. Aunque este teorema resulta del mayor interés, pues revela la enorme diferencia que hay entre los juegos jugados una vez y los jugados indefinidamente, en el fondo compromete la capacidad predictiva de la teoría. La teoría no puede aclarar cuál de los múltiples equilibrios van a seleccionar los jugadores.

Puesto que una exposición sistemática del teorema popular corresponde a un texto de teoría de juegos más avanzado, aquí sólo se presenta una versión muy simplificada de dicho teorema. A pesar de que se introduce el teorema sin el aparato formal que usualmente le acompaña, esta sección es algo más abstracta que otras de este libro. El lector que no esté especialmente interesado en esta cuestión puede saltar directamente a las dos secciones últimas del capítulo, en las que se analizan modelos de juegos repetidos.

Para llegar al teorema, es preciso, en primer lugar, introducir dos conceptos nuevos: los pagos medios y los pagos factibles. El pago medio *(average payoff)* π es el valor medio de una serie de pagos π_1, π_2, π_3,..., obtenidos a lo largo del tiempo. El valor presente de este pago es $V = \frac{\pi}{1-\delta}$. Si queremos expresar dicho valor presente en términos de los pagos en el juego estático de referencia *(stage game)*, basta simplemente con despejar con respecto a π, es decir,

$$\pi = (1 - \delta)\, V = (1 - \delta) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \pi_t$$

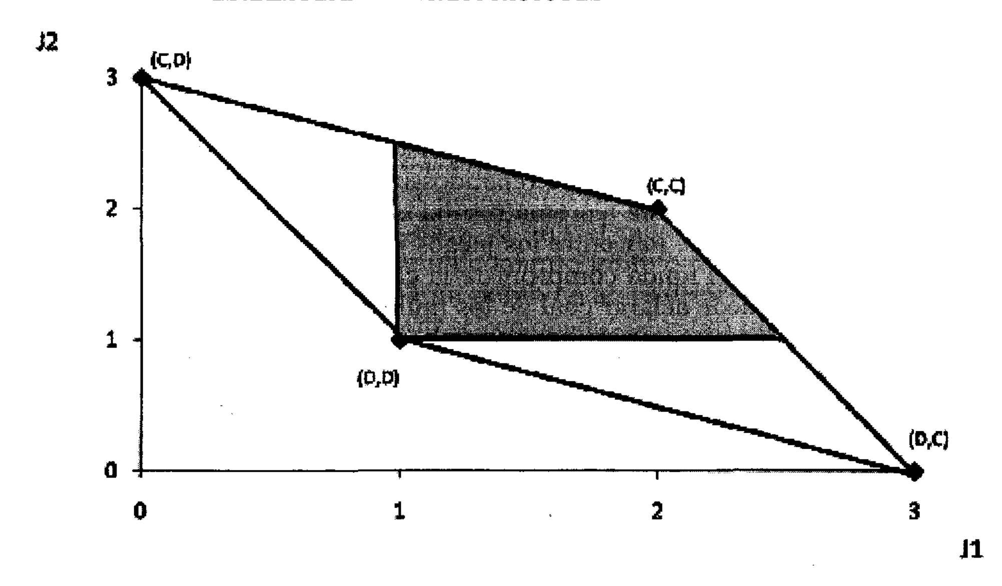
En cuanto al pago factible *(feasible payoff)*, se trata de una combinación convexa o media ponderada de los pagos que corresponden a las estrategias puras del juego. Por ejemplo, sea el Dilema del Prisionero que se representa en el cuadro 2.16. Cabe representar los pagos de las diferentes combinaciones de estrategias según aparecen en el gráfico 4.1.

Cualquier punto en el interior del área definida por los cuatro pagos es un pago factible. Así, el pago (1,8, 1,8) se puede obtener como una combinación convexa (o media ponderada) de los pagos asociados a las estrategias (C, C) y (D, D). En concreto,

$$0{,}8(\text{C, C}) + 0{,}2(\text{D, D}) = 1{,}8.$$

GRÁFICO 4.1

EL ÁREA DEFINIDA POR LOS PAGOS DEL DP DEL CUADRO 2.16



El teorema popular se puede formular como sigue. Sean (e_1, e_2) los pagos medios del equilibrio de Nash en el juego de referencia. Sean a su vez (x_1, x_2) pagos factibles. Si $x_i > e_i$ para todo i, y si δ es suficientemente alto, cualquier combinación de estrategias que produce los pagos medios (x_1, x_2) es un equilibrio de Nash.

La idea es la siguiente: se pueden construir equilibrios de Nash que proporcionen unos pagos factibles superiores a los pagos medios del equilibrio de Nash en el juego estático utilizando como estrategia de castigo dichos pagos medios. Los nuevos equilibrios se sostienen, por tanto, sobre la amenaza de volver al equilibrio del juego estático en caso de que uno de los jugadores se desvíe de su estrategia en el equilibrio que produce pagos superiores. Suponiendo que el castigo se aplicará permanentemente, los jugadores han de calibrar si les interesa desviarse en una ocasión y a partir de ese momento recibir siempre los pagos asociados al equilibrio en el juego estático o si les trae a cuenta no desviarse de las estrategias que producen unos pagos superiores a los del equilibrio del juego estático.

En el gráfico 4.1 el área sombreada corresponde a todos aquellos pagos factibles que producen a los dos jugadores mayor utilidad que el equilibrio en el juego de referencia. Tratándose de un Dilema del Prisionero, dicho equilibrio es (D, D) y produce unos pagos (1, 1). Cualquier combinación de estrategias que produzca más de una unidad de utilidad a cada uno de los dos jugadores es un equilibrio siempre y cuando el factor de descuento sea lo suficientemente alto.

Formalmente, la demostración procede del siguiente modo. Sea d_1 el pago medio de J1 de desviarse con respecto a la combinación de estrategias que produce los pagos (x_l, x_2). Por lo explicado en el teorema, es evidente que $d_1 > x_1 > e_1$. Si J1 se desvía de la combinación de estrategias que da lugar a (x_1, x_2), su utilidad a partir de ese momento es:

$$\dot{V} = d_1 + \delta e_1 + \delta^2 e_1 + \ldots = d_1 + \frac{\delta e_1}{1 - \delta}$$

En cambio, si no se desvía obtiene obtiene x_l en la ronda presente, siendo V el valor presente de lo que obtiene después cuando juega óptimamente. Por tanto, el valor presente es:

$$V = x_1 + \delta V$$

Es decir,

$$V = \frac{x_1}{1 - \delta}$$

Por tanto, J1 no se desvía cuando:

$$\frac{x_1}{1 - \delta} \geq d_1 + \frac{\delta e_1}{1 - \delta};$$

$$x_1 \geq d_1(1 - \delta) + \delta e_1;$$

$$\delta(d_1 - e_1) \geq d_1 - x_1;$$

$$\delta \geq \frac{d_1 - x_1}{d_1 - e_1}$$

Si $\delta \geq \max\left(\frac{d_1 - x_1}{d_1 - e_1}, \frac{d_2 - x_2}{d_2 - e_2}\right)$, cualquier combinación de estrategias que produzca pagos factibles superiores a los pagos del equilibrio de Nash en el juego de referencia constituye un equilibrio de Nash. Es la amenaza de castigar con volver para siempre a jugar según el equilibrio del juego de referencia lo que permite sostener los equilibrios múltiples del juego repetido.

El modelo de negociación de Rubinstein

En esta sección se analiza el modelo de negociación de Rubinstein como un juego repetido tres veces. El análisis de este modelo permite utilizar todo el instrumental analítico aprendido hasta el momento, tanto la idea de equilibrio de perfección en el subjuego como el descuento temporal de los juegos repetidos.

En una negociación dos o más partes han de ponerse de acuerdo en cómo repartirse un bien. Supóngase que sólo hay dos negociadores. Corresponde a Nash el mérito de haber ofrecido por primera vez en 1950 una solución a los problemas de negociación basada en la teoría de juegos (en este sentido, conviene no confundir la idea de equilibrio de Nash con la idea de solución negociadora de Nash). Nash estableció una serie de condiciones que toda propuesta de solución debe cumplir, demostrando axiomáticamente que su propuesta satisfacía dichas condiciones. Frente a esta solución axiomática, Ariel Rubinstein planteó en 1982 un modelo que no se basaba en condiciones ideales, sino que partía directamente de la racionalidad de los agentes y de su poder de negociación. En realidad, el propio Nash había planteado también de forma embrionaria una solución basada sólo en la racionalidad, pero el desarrollo completo hubo de esperar hasta el trabajo de Rubinstein. El modelo de Rubinstein consiste en un juego repetido indefinidamente (véase Osborne y Rubinstein 1990: 29-49), aunque aquí se expone una versión simplificada en sólo tres periodos en la que se llega en lo esencial al mismo resultado.

La solución de un problema de negociación depende del poder negociador de las partes. Supongamos que lo que hay en juego es un euro. Dos personas han de ponerse de acuerdo en cómo repartirse dicho euro: si no lo consiguen, las dos se quedan sin nada. Para Nash, el poder negociador queda reflejado en la actitud hacia el riesgo de las partes. Cuanto mayor sea la necesidad de una de las partes de conseguir buenos resultados, más averso al riesgo es el agente, es decir, menos se arriesga a que haya un desacuerdo final y menos capacidad de amenaza tiene en el intercambio de ofertas y contraofertas. Rubinstein parte del mismo supuesto, sólo que identifica el poder negociador con el factor de descuento de las partes. Cuanto más bajo sea el factor de descuento, es decir, cuanto más impaciente sea el agente, menos poder negociador tiene, pues más prisa tiene en conseguir un acuerdo, aun a costa de obtener un peor resultado posible.

En el modelo hay dos jugadores, J1 y J2. Ahora se permite, a diferencia de lo que sucedía en modelos anteriores, que cada jugador tenga su propio factor de descuento. Así, hablaremos de δ_1 y δ_2 con respecto a J1 y J2 respectivamente. Los periodos de negociación son tres. Cada periodo de negociación se compone de dos partes, una oferta $(x, 1 - x)$ y una respuesta a la

oferta, donde x es la parte que se lleva J1 y $1 - x$ es lo que se lleva J2. Si un jugador acepta la oferta de su rival, el juego termina. Si no la acepta, se pasa al periodo siguiente. J1 propone ofertas en los periodos impares y J2 en los pares. Los pagos del juego corresponden a la oferta que finalmente se acepte (salvo que los actores no se pongan nunca de acuerdo, en cuyo caso cada uno obtiene 0). El valor en el presente de los pagos que se obtienen en el periodo t hay que descontarlo exponencialmente, de forma que una oferta $(x, 1 - x)$ aceptada en el periodo t vale, en términos presentes, $(\delta_1^t x, \delta_2^t (1 - x))$.

El juego, así descrito, tiene múltiples equilibrios de Nash, la mayor parte de los cuales no tienen demasiado sentido. Por ejemplo, la siguiente combinación de estrategias es un equilibrio de Nash:

(J1 siempre pide 1 y rechaza cualquier oferta inferior; J2 siempre ofrece 1 y acepta cualquier oferta.)

Este par de estrategias se traduce así en el presente contexto: J1 en la primera ronda hace la oferta (1, 0), por la cual J1 se queda con todo el euro y J2 con nada, y J2 acepta, finalizando ahí el juego. Si J2 está convencido de que J1 rechaza cualquier otra cosa y J1 cree que J2 se conforma con cualquier oferta, cada estrategia es una respuesta óptima a la otra.

Se pueden buscar equilibrios de Nash más rebuscados e igualmente implausibles. Véase, por ejemplo, la siguiente combinación de estrategias:

(J1 pide 1 en el primer periodo, rechaza en el segundo cualquier oferta que no le dé 1, ofrece en el tercer periodo (0,5, 0,5); J2 rechaza en el primer periodo cualquier oferta que no le dé 1, pide 1 en el segundo periodo, acepta en el tercer periodo quedarse con 0,5.)

Se trata de un equilibrio de Nash que en este caso forzaría a los jugadores a llegar al periodo tercero, pues en el primer periodo J2 rechaza la oferta de J1, en el segundo J1 rechaza la oferta de J2, y en el tercero J2 acepta la oferta (0,5, 0,5) de J1. Aun siendo esto un equilibrio de Nash, es absurdo, pues si los dos están dispuestos a conformarse en el tercer periodo con 0,5 euros, ¿por qué esperar hasta el tercer periodo, asumiendo el coste de la depreciación del valor del euro durante dos periodos?

Rubinstein demostró que a pesar de esta multiplicidad de equilibrios de Nash, hay un único equilibrio de perfección en el subjuego. Esa demostración depende sólo de un supuesto: que cuando un jugador sea indiferente entre aceptar y rechazar una oferta, elige aceptarla. En el caso más extremo, esto implica que si un jugador en el último periodo tiene que elegir entre una oferta que le deja 0 euros y rechazar la oferta provocando la desaparición del euro, acepta la oferta. El jugador prefiere aceptar la oferta (1, 0) a rechazarla.

Para calcular el equilibrio de perfección en el subjuego, hay que proceder por retroinducción, de atrás hacia delante. Se desarrolla el argumento en tres fases, A, B y C.

A. Comenzamos por el periodo final, $t = 3$. Habiendo sólo tres periodos de ofertas, y haciendo ofertas J1 en los periodos impares, J1 tiene capacidad de ultimátum en la última ronda. J1 puede forzar al máximo a J2, pues si J2 rechaza la oferta final de J1, J2 se queda sin nada. De esta manera, en $t = 3$ J1 hace la oferta (1, 0) y J2, por la razón anteriormente expuesta, acepta.
B. En $t = 2$, le toca a J2 hacer una oferta. J1 sólo acepta la oferta si es al menos tan buena como lo que puede conseguir en el periodo siguiente, $t = 3$. Lo que puede conseguir en $t = 3$ es 1, que en el periodo $t = 2$ lo valora como $\delta_1 1$. Por lo tanto, la oferta de J2 es $(\delta_1 1, 1 - \delta_1 1)$. Esta oferta hace a J1 indiferente entre aceptar y rechazar. Suponemos que J1 la acepta.
C. En $t = 1$, J1 hace una oferta que J2 acepta sólo si lo que le toca es al menos tan bueno como lo que podría conseguir rechazando la oferta y pasando al siguiente periodo. Lo que J2 puede conseguir en $t = 2$ es $1 - \delta_1 1$, luego J2 es indiferente en $t = 1$ entre conseguir $\delta_2(1 - \delta_1 1)$ en $t = 1$ o conseguir $1 - \delta_1 1$ en $t = 2$. Por lo tanto, la oferta de J1 es $(1 - \delta_2(1 - \delta_1 1), \delta_2(1 - \delta_1 1))$. Cuando J1 hace esa oferta, J2 la acepta inmediatamente.

Esquemáticamente, el proceso se podría representar tal y como aparece en el cuadro 4.5.

CUADRO 4.5

EL MODELO DE NEGOCIACIÓN DE RUBINSTEIN EN TRES PERIODOS

	Oferta de J1	*Oferta de J2*
$t = 1$	$(1 - \delta_2(1 - \delta_1 1), \delta_2(1 - \delta_1 1))$	
$t = 2$		$(\delta_1 1, 1 - \delta_1 1)$
$t = 3$	(1, 0)	

El único equilibrio de perfección en el subjuego consiste por tanto en que J1 y J2 sigan las estrategias especificadas. En la primera ronda J1 ofrece $(1 - \delta_2(1 - \delta_1 1), \delta_2(1 - \delta_1 1))$ y J2 acepta. El juego acaba ahí. Ésa es la ruta de equilibrio. No obstante, dicha ruta de equilibrio se sostiene sobre las

respuestas óptimas calculadas fuera de la ruta de equilibrio, es decir, la ruta de equilibrio es tal porque los jugadores anticipan que en el segundo periodo la oferta de J2 sería $(\delta_1 1, 1 - \delta_1 1)$ y que en el tercer periodo la oferta de J1 sería (1, 0).

Supongamos que $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}8$. Teniendo igual poder negociador, la diferencia o asimetría que se produce en la oferta inicial de J1 es consecuencia única y exclusivamente del poder de ultimátum que tiene J1 en el último periodo. Con ese factor común de descuento, la oferta de J1 sería (0,84, 0,16). Si además variamos el factor de descuento, o poder negociador, de forma que J1 sea más paciente que J2, la diferencia es todavía mayor. Valga $\delta_1 = 0{,}9$ y $\delta_2 = 0{,}7$. Ahora la oferta de J1 sería (0,93, 0,07), todavía más asimétrica.

Cuando el juego se juega indefinidamente, habiendo una sucesión ininterrumpida de ofertas y contraofertas hasta que se alcanza un acuerdo, el poder de ultimátum de J1 desaparece y cualquier diferencia que se produzca en la oferta de equilibrio en el primer periodo se debe casi en su totalidad a los distintos factores de descuento de los jugadores. Cuando el juego se repite indefinidamente, la oferta que forma parte de la ruta de equilibrio de perfección en el subjuego es:

$$\left(\frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1\delta_2}, 1 - \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1\delta_2}\right) = \left(\frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1\delta_2}, \delta_2 \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1\delta_2}\right).$$

Aquí sigue habiendo una ligera asimetría a favor de J1 aunque los factores de descuento sean idénticos, simplemente porque J1 parte con una ventaja marginal por ser el primero en poder realizar una oferta. Si suponemos $\delta_1 = \delta_2 = 0{,}9$, la oferta de equilibrio es (0,53, 0,47). Cuando el factor de descuento es idéntico, la oferta de equilibrio se simplifica así:

$$\left(\frac{1 - \delta}{1 - \delta^2}, \frac{\delta(1 - \delta)}{1 - \delta^2}\right) = \left(\frac{1}{1 + \delta}, \frac{\delta}{1 + \delta}\right)$$

Si suponemos factores de descuento distintos, entonces el poder negociador es asimétrico y eso se refleja en una oferta más favorable a un jugador que a otro. Por ejemplo, si $\delta_1 = 0{,}7$ y $\delta_2 = 0{,}9$, la oferta de equilibrio es (0,36, 0,64).

La propiedad más sorprendente del modelo de Rubinstein, ya sea en la versión simplificada en tres periodos, ya sea en el juego repetido indefinidamente, es que la negociación nunca llega a desarrollarse. Siempre se acaba en la primera ronda, con una oferta de equilibrio que lanza J1 y que J2 acepta. Sin embargo, en el mundo real observamos que a veces las negociaciones se prolongan durante largos periodos de tiempo. Esto no tiene sentido en términos del modelo de Rubinstein, puesto que los dos jugadores saben que cuanto más tiempo pase, más valor pierde el bien sobre el que están negociando. Anticipando esa pérdida de valor en función del factor de descuento

de cada jugador, las partes consiguen llegar a un acuerdo en la primera ronda del juego. Si a pesar de esto las negociaciones no se acaban en la primera ronda, es porque la situación real es más compleja que el modelo de Rubinstein. Por ejemplo, puede haber información incompleta: los jugadores no tienen toda la información relevante sobre sus rivales y pueden avanzar en la negociación con la intención de recabar parte de esa información que les falta. Este tipo de juegos de información incompleta se estudia en el siguiente capítulo.

El modelo de Rubinstein no sólo tiene aplicaciones económicas. En ciencias sociales el modelo se ha utilizado para entender por qué y cómo suceden las huelgas en los enfrentamientos entre trabajadores y empresarios (Lange y Tsebelis 1993), o para modelizar el funcionamiento interno del Congreso estadounidense (Baron y Ferejohn 1987). Una visión panorámica de los desarrollos del modelo de Rubinstein y de sus aplicaciones múltiples puede encontrarse en Muthoo (1999).

Aplicación: El surgimiento de ideologías políticas

Si partimos del supuesto estricto de auto-interés material, ¿cómo explicar que muchas personas tengan preferencias sobre asuntos que no guardan ninguna relación con sus vidas? ¿Por qué razón alguien que vive en un país desarrollado y democrático tiene opiniones sobre los abusos de los derechos humanos en algún país dictatorial y en vías de desarrollo? ¿O por qué un varón heterosexual debería preocuparse por los derechos de matrimonio de los homosexuales? Kathleen Bawn (1999) ha intentado proporcionar una respuesta a estas preguntas a partir del análisis de un juego repetido. Voy a presentar en esta sección la parte más sencilla de su modelo.

Según Bawn, es posible entender el desarrollo de preferencias acerca de cuestiones que no nos tocan de cerca en términos de estricto auto-interés material. Todas las preferencias que no se basan en nuestros intereses más directos forman parte de lo que la autora llama "ideología". Pues bien, cabe reconstruir la creación de ideologías a partir de un juego de formación de coaliciones en el que tan sólo intervienen los intereses materiales de los jugadores. Desde este punto de vista, dichos intereses se persiguen mejor a largo plazo si las personas actúan ideológicamente que si no lo hacen así. La razón, en esencia, es el "hoy por ti, mañana por mí". Se constituye de esta manera una coalición de apoyo mutuo que garantiza que sus miembros estén mejor que si actuaran individualmente. El comportamiento que resulta de la coalición es equivalente a actuar según consideraciones ideológicas.

Para poder formalizar esta idea, expondré a continuación el juego más sencillo del modelo de Bawn, lo que ella llama el "juego de la política". Hay

tres jugadores, J1, J2 y J3. En cada periodo t, se reúnen para decidir si se embarcan en algún proyecto público. Si se lleva a cabo el proyecto, uno de los jugadores, con probabilidad 1/3, se lleva un beneficio B, mientras que otro, con igual probabilidad, paga un coste C_t, quedando el tercero no afectado por el proyecto, ni para bien ni para mal. Mientras que los beneficios son constantes, los costes pueden variar de un periodo a otro. De ahí que los representemos con un subíndice temporal. Hay una distribución uniforme de probabilidad para los costes en el intervalo $(0, 2B)$. El coste oscila por tanto entre 0 y dos veces el beneficio B del proyecto.

Cada uno de los tres jugadores tiene tres estrategias con respecto al proyecto público. Puede abstenerse (A), votar a favor del proyecto (F), u oponerse (O) votando en contra. Votar, ya sea a favor o en contra, supone un coste v, que es siempre mucho menor que B. El proyecto se lleva a cabo si hay una mayoría a favor.

Desde un punto de vista estático, el juego de la política se desarrolla como sigue: Naturaleza elige quién es la persona que se ve beneficiada por el proyecto, quién tiene que pagar el coste, y quién es indiferente porque el proyecto no le afecta. Supongamos, por ejemplo, que J1 es quien ha de asumir el coste del proyecto, J2 es el beneficiario del mismo, y a J3 no le afecta ni positiva ni negativamente. Puesto que J3 no tiene incentivos para participar, siempre se abstiene. El juego entre J1 y J2 se puede representar tal y como aparece en el cuadro 4.6.

CUADRO 4.6

EL JUEGO ESTÁTICO DE LA POLÍTICA

		J2	
		F	A
J1	A	$-C, B-V$	$0, 0$
	O	$-v, -v$	$-v, 0$

Si J1 se abstiene y J2 vota a favor, el proyecto se aprueba, con lo que J1 paga el coste del proyecto, mientras que J1 se lleva el beneficio y paga el coste de votar. Si, por el contrario, J1 vota en contra y J2 a favor, hay un empate, el proyecto no se aprueba y los dos jugadores pagan el coste de votar. Si los dos se abstienen, no se aprueba el proyecto y nadie paga coste alguno. Por último, si J1 se opone y J2 se abstiene, el proyecto no sale adelante y J1 paga el coste de votar.

Si $C < v$, A domina débilmente a O para J1 y éste por tanto se abstiene. J2 vota a favor y el proyecto se aprueba. El equilibrio de Nash es por tanto

(A, F). Cuando $C \geq v$, los jugadores siguen estrategias mixtas, de tal manera que los dos jugadores son indiferentes entre sus estrategias puras. Sean p_{J1} y p_{J2} las probabilidades de que J1 y J2 se abstengan respectivamente. J1 hará indiferente a J2 cuando p_{J1} sea tal que:

$$\text{UE}_{J2}(A) = \text{UE}_{J2}(F)$$

Es evidente que $\text{UE}_{J2}(A) = 0$. Por tanto, la ecuación anterior se puede expresar así:

$$0 = p_{J1}(B - v) + (1 - p_{J1})(-v)$$

Despejando con respecto a p_{J1},

$$p_{J1} = \frac{v}{B}$$

En cuanto a J2, elegirá p_{J2} tal que

$$\text{UE}_{J1}(A) = \text{UE}_{J1}(O)$$

Es decir,

$$(1 - p_{J2})(-C) = -v$$

Despejando a su vez,

$$p_{J2} = \frac{C - v}{C}$$

Cuando $C \geq v$, la probabilidad conjunta de que un proyecto se apruebe será por tanto la probabilidad de que J1 se abstenga por la probabilidad de que J2 no se abstenga, es decir:

$$p_{J1}\,(1 - p_{J2}) = \frac{v^2}{CB}$$

Resumiendo, las estrategias de equilibrio en el juego estático para los distintos tipos de jugadores son los siguientes:

Beneficiario: Si $C < v$, F

Si $C \geq v$, F con probabilidad $\frac{v}{C}$ y A con probabilidad $\frac{C - v}{C}$.

Pagador: Si $C < v$, A

Si $C \geq v$, O con probabilidad $\frac{B-v}{B}$ y A con probabilidad $\frac{v}{B}$.

Indiferente: Elige A con cualquier valor de C.

Cabe también calcular el pago esperado para un jugador genérico sabiendo que tiene una probabilidad de 1/3 de ser quien paga el proyecto, 1/3 de ser quien se beneficia y 1/3 de que no le afecte el proyecto. A su vez, hay que tener en cuenta la probabilidad de que ocurra $C < v$ o $C \geq v$. Puesto que C tiene una distribución uniforme de probabilidad en el intervalo (0, 2B), la probabilidad de $C < v$ ha de ser $\frac{v}{2B}$. En consecuencia, $\Pr(C \geq v) = 1 - \frac{v}{2B} = \frac{2B-v}{2B}$.

Pues bien, la utilidad esperada del juego dados los equilibrios antes especificados y teniendo en cuenta que es Naturaleza quien decide la identidad de cada jugador, es la siguiente[1]:

$$\frac{v}{2B}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{-v}{2}\right) + \frac{1}{3}(B-v) + \frac{1}{3}0\right) + \frac{2B-v}{2B}\left(\frac{1}{3}(-v) + \frac{1}{3}0 + \frac{1}{3}0\right) = -\frac{v}{6} - \frac{v^2}{12B}$$

El término del lado izquierdo de la ecuación tiene dos partes. La primera corresponde al caso de que C sea menor que v. Con probabilidad 1/3, el jugador tiene que pagar el coste C del proyecto. Dado que dicho coste es menor que v, pues partimos de ese supuesto, su valor esperado en el intervalo $(0, v)$ es $v/2$, ya que se trata de una distribución uniforme. Con probabilidad 1/3, el jugador es el beneficiario, en cuyo caso el proyecto se aprueba con su voto, lo que le da un beneficio B menos el coste de votar. Y con la probabilidad restante es indiferente, en cuyo caso se abstiene y no gana ni pierde. La segunda parte corresponde al caso de que C sea mayor que v. Ahora los pagos se determinan según las estrategias mixtas del equilibrio.

La expresión anterior tiene importancia para determinar si, al repetirse indefinidamente el juego, hay otras combinaciones de estrategias en las que los tres jugadores están mejor que con respecto al equilibrio del juego estático. En principio, sabemos por el teorema popular que cabe esperar múltiples equilibrios. Vamos a considerar uno de ellos que tiene especial relevancia para el asunto de la ideología. A fin de describir este equilibrio, sea EQ la estrategia de equilibrio en el juego estático (jugado una sola vez). Pues bien, llamaremos R a la siguiente combinación de estrategias en el juego repetido:

---

[1] El lector que acuda al artículo original de Bawn encontrará que a partir de este punto se derivan resultados ligeramente distintos a los que aquí presento. Esto se debe a que Bawn comete un pequeño error en la especificación de los pagos, suponiendo que el beneficiario obtiene B, cuando en realidad obtiene $B - v$. Esta pequeña omisión no tiene, sin embargo, consecuencias sustantivas en el modelo. En adelante se presentan los cálculos corregidos por el autor.

— Si J1 y J2 han jugado R_{Ji} (i = J1, J2) en el pasado, entonces juegan R_{Ji} en el presente.
— R_{J1} y R_{J2} se interpretan así: apoyar cualquier proyecto en el que el beneficiario es J1 o J2, oponerse a cualquier proyecto en el que el beneficiario es J3.
— R_{J3}: abstenerse siempre.

En esta combinación de estrategias, J1 y J2 forman una coalición de apoyo mutuo que actúa en contra de J3. Si alguien observara este comportamiento, podría conjeturar que J1 y J2 sienten simpatía entre ellos, o que comparten la misma ideología. Sin embargo, lo único que estamos suponiendo hasta el momento es que J1 y J2 deciden formar una coalición sobre la sola premisa del auto-interés.

Para confirmar que R es un equilibrio, tenemos que mostrar que J1 y J2 están mejor jugando R que EQ. El pago esperado del equilibrio R para J1 y J2 es $\frac{B}{6} - v$. Esta expresión resulta de tener en cuenta las probabilidades de que la identidad de los jugadores sea la de beneficiarios o pagadores. A fin de realizar los cálculos correctos, conviene examinar el cuadro 4.7, en el que se presentan todas las situaciones posibles.

CUADRO 4.7

LAS SEIS POSIBLES SITUACIONES EN EL EQUILIBRIO R

Identidad		*Acción*			*Pagos*		
Beneficiario	*Pagador*	*J1*	*J2*	*J3*	*J1*	*J2*	*J3*
J1	J2	*F*	*F*	*A*	$B - v$	$-B - v$*	0
J1	J3	*F*	*F*	*A*	$B - v$	$-v$	$-B$
J2	J1	*F*	*F*	*A*	$-B - v$ *	$B - v$	0
J2	J3	*F*	*F*	*A*	$-v$	$B - v$	$-B$
J3	J1	*O*	*O*	*A*	$-v$	$-v$	0
J3	J2	*O*	*O*	*A*	$-v$	$-v$	0

* El pago es $-C - v$. Como C es una variable aleatoria con una distribución uniforme de probabilidad en el intervalo (0, 2B), el valor esperado de C es B.

Las seis situaciones son equiprobables y por tanto la probabilidad de ocurrencia de cada una de ellas es 1/6. Los pagos esperados de J1 y J2 de acuerdo con el cuadro 4.7 son:

$$\frac{2}{6}(B-v)+\frac{1}{6}(-B-v)+\frac{3}{6}(-v)=\frac{B}{6}-v$$

En cuanto al pago esperado por J3, es simplemente $-B/3$, como resulta evidente en el cuadro 4.8.

Ahora ya podemos determinar si R es un equilibrio o no. Para ello, es preciso averiguar si a J1 o a J2 les interesa desviarse de la estrategia que dicta R cuando les toca hacerse cargo de los costes del proyecto. Podrían tener la tentación de votar en contra, sobre todo en el caso más desfavorable posible, cuando el coste del proyecto es máximo, es decir, cuando $C = 2B$. Si a quien le toca pagar vota en contra en esa ronda, se ahorra el coste $2B$. Se supondrá que si se produce una desviación, entonces el jugador perjudicado vuelve a la estrategia EQ del juego estático para siempre.

La utilidad de no desviarse en la ronda t cuando al jugador J1 o J2 le toca pagar el proyecto y el coste es el máximo, $2B$, se puede representar así:

$$(-2B-v)+\sum_{t=1}^{\infty}\delta^t\left(\frac{B}{6}-v\right)$$

A su vez, la utilidad de desviarse en la ronda presente votando en contra del proyecto y recibiendo a partir de ese momento los pagos correspondientes al equilibrio EQ del juego estático es:

$$-v+\sum_{t=1}^{\infty}\delta^t\left(-\frac{v}{6}-\frac{v^2}{12B}\right)$$

El primer término, $-v$, es el coste de votar en contra en la ronda presente, lo que hace que el proyecto no se apruebe y por tanto el jugador no tenga que pagar el coste del mismo, mientras que el segundo representa el pago del castigo permanente que consiste en jugar el juego según el equilibrio del juego estático.

La combinación de estrategias R (que reproduce el comportamiento ideológico) es un equilibrio cuando el coste del proyecto es máximo ($C = 2B$) siempre que el pago de no desviarse sea superior al pago de desviarse. Es decir, cuando

$$(-2B-v)+\sum_{t=1}^{\infty}\delta^t\left(\frac{B}{6}-v\right)>-v+\sum_{t=1}^{\infty}\delta^t\left(-\frac{v}{6}-\frac{v^2}{12B}\right)$$

Aplicando las reglas básicas del álgebra, despejamos el valor crítico del factor de descuento δ que satisface la inecuación anterior. En concreto, cuando el coste del proyecto es el máximo, δ ha de cumplir esta condición:

$$\delta > \frac{24B^2}{26B^2 - 10Bv + v^2}$$

Cuando se cumple, R es un equilibrio de Nash, puesto que ni J1 ni J2 tienen incentivos para desviarse de la coalición que forman en perjuicio de los intereses de J3. La repetición indefinida del juego permite, por tanto, que surja una pauta de comportamiento que, según Bawn, coincide con lo que consideramos que es el comportamiento ideológico: J1 se interesa por proyectos en los que no tiene un interés personal a cambio de que J2 haga lo mismo. Esa coalición les reporta beneficios, de tal modo que los jugadores están mejor desarrollando un interés por cuestiones que les son ajenas que cuando actúan solamente en función de consideraciones en las que sólo interviene el interés personal.

5
Juegos de información incompleta

Información incompleta

En el capítulo 3 se distinguió entre juegos de información perfecta y juegos de información imperfecta. Un juego de información imperfecta es aquel en el que uno de los jugadores no sabe qué estrategia ha elegido su rival en la jugada anterior. Más técnicamente, un juego de información perfecta se define como un juego en el que todos los conjuntos de información de los jugadores son *singletons*. En un juego de información incompleta, no todos los conjuntos de información son *singletons*, pero no porque un jugador no sepa lo que ha hecho antes su rival, sino porque uno de los dos jugadores (o los dos) no está seguro acerca de los pagos de su rival. El jugador sabe que los pagos del otro pueden ser de varios tipos, pero desconoce cuál de ellos corresponde realmente a los pagos auténticos. En el capítulo 2 se mencionó esta posibilidad al comentar las interpretaciones que se han propuesto de las estrategias mixtas. Según una de estas interpretaciones, las probabilidades con las que un jugador elige cada estrategia pura son las probabilidades de que sea un tipo de jugador u otro. De esta manera, J1 no se enfrenta a una estrategia mixta de J2, sino que J1 no sabe qué pagos tiene realmente su contrincante: tan sólo sabe que los pagos pueden ser unos u otros, y que en función de cuáles sean los pagos reales, J2 elige una estrategia pura u otra.

Dentro de los juegos de información incompleta, los que tienen más aplicaciones empíricas son los juegos de señal *(signaling games)*. Cuando un jugador no está seguro acerca de los pagos del rival, puede utilizar los movimientos del rival como pistas o información indiciaria acerca de sus pagos verdaderos. De esta forma, el jugador va refinando o precisando sus creencias iniciales acerca del tipo de jugador con el que está interactuando. En ocasiones, las jugadas del rival pueden ser suficientemente informativas como para disipar del todo la incertidumbre inicial acerca de sus pagos.

Puede suceder que la información incompleta se dé por ambas partes, es decir, que ninguno de los jugadores esté seguro acerca de los pagos del otro. Esta situación es técnicamente compleja y no se analiza aquí. Nos limitamos al caso en que sólo uno de los jugadores no conoce los pagos del otro, pero el

otro sí conoce los pagos de su rival. Los primeros juegos de señal se remontan a comienzos de los años setenta del siglo pasado: se trata de modelos en los que por ejemplo se representa la interacción estratégica entre un trabajador que busca trabajo y un empresario que ofrece un puesto de trabajo. El empresario no sabe con qué tipo de trabajador está tratando, si es un trabajador dispuesto a esforzarse o si aprovechará cualquier oportunidad para zafarse de sus obligaciones. El empresario, por tanto, tiene información incompleta sobre el tipo de trabajador al que está pensando contratar. Parte del problema se puede resolver si el trabajador manda una señal sobre su naturaleza al empresario: esa señal puede consistir en el nivel educativo alcanzado, pues éste transmite información sobre la capacidad y tenacidad del individuo.

En el estudio de los juegos de información incompleta es fundamental el papel que desempeñan las creencias de los jugadores. Hasta el momento no hemos incorporado las creencias como parte del equilibrio del juego, aunque estaban presentes en el juego en los nodos o conjuntos de información de los jugadores. En los juegos que se van a examinar a continuación, las creencias se refieren a los posibles pagos del rival y su contenido puede ir variando conforme avanza el juego. De ahí que tengamos que averiguar en función de qué criterios las creencias pueden cambiar y cómo se incorporan las creencias en el cálculo del equilibrio. La primera cuestión, cómo nueva información modifica creencias anteriores, se puede abordar con la regla de Bayes, de la que nos ocupamos en la siguiente sección. La segunda, cómo se especifican las creencias en un equilibrio, obliga a introducir el concepto de equilibrio bayesiano perfecto. Una vez que estas dos cosas queden explicadas, podremos empezar con los juegos de información incompleta.

La regla de Bayes

La regla de Bayes permite revisar o actualizar nuestras creencias a la luz de nueva información. Establece cómo la ocurrencia de un suceso altera una creencia inicial acerca de un estado del mundo. Supongamos, en el caso más simple, que sólo hay dos estados del mundo, A y $\sim A$ (A y su contrario): por ejemplo, que un acusado en un juicio dice la verdad (A) o miente ($\sim A$). Diremos que $p(A)$ es la *creencia inicial (prior belief)* que tiene un individuo (por ejemplo el juez) de que el acusado dice la verdad, su estimación subjetiva de que es sincero. Durante el interrogatorio el juez descubre que el acusado se ruboriza cuando responde a ciertas preguntas. Este suceso, al que llamaremos B, altera la creencia inicial y lleva al juez a formarse una nueva creencia, una *creencia posterior* a la observación de B (su *posterior belief*). Esta creencia posterior la podemos representar como una probabilidad condicional, $p(A|B)$, es decir, la probabilidad de que la persona esté diciendo la verdad

dado que se ruboriza. La regla de Bayes indica la relación que hay entre $p(A)$ y $p(A|B)$, entre la creencia inicial y la creencia posterior. En concreto, la regla se formula así:

$$p(A|B) = \frac{p(A)p(B|A)}{p(A)p(B|A) + p(\sim A)p(B|\sim A)}$$

La probabilidad de que alguien diga la verdad cuando se ruboriza es igual al cociente entre dos cantidades: en el numerador tenemos la probabilidad de que la persona diga la verdad multiplicada por la probabilidad de que se ruborice si dice la verdad; en el denominador tenemos ese mismo producto sumado a otro, la probabilidad de que la persona no diga la verdad multiplicada por la probabilidad de que se ruborice si miente.

Supóngase que $p(A) = 0,6$. Ésta es la creencia inicial de que la persona dice la verdad. Supóngase también que $p(B|A) = 0,1$ (la probabilidad de que alguien se ruborice cuando dice la verdad). La aplicación de la regla de Bayes nos da este resultado:

$$p(A|B) = \frac{0,6*0,1}{0,6*0,1 + 0,4*0,9} = 0,143$$

La creencia posterior de que el acusado esté diciendo la verdad es sólo de 0,14, frente a la creencia inicial 0,6. La creencia inicial por tanto ha sido actualizada a la luz del acontecimiento observado.

Cuando hay más de dos estados del mundo posibles (por ejemplo, que diga toda la verdad, que diga una parte de la verdad, que mienta en todo), la fórmula es:

$$p(A_i|B) = \frac{p(A_i)p(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i)p(B|A_i)}$$

La regla de Bayes describe cómo la nueva información se procesa racionalmente. Su derivación se puede establecer en sólo dos pasos. Si partimos de la definición de probabilidad condicionada, tenemos que:

$$p(A_i|B) = \frac{p(A_i \cap B)}{p(B)}$$

De lo que se trata ahora es de aplicar al numerador la regla sobre el producto de probabilidades y al denominador la regla sobre la probabilidad total. La regla sobre el producto de probabilidades establece que:

$$p(A \cap B) = p(B|A)p(A) = p(A|B)p(B)$$

Es decir, que la probabilidad de que se den A y B es igual a la probabilidad de que se dé A si se da B multiplicado por la probabilidad de que se dé B. Esto nos da el numerador de la regla de Bayes. Por su parte, la regla sobre la probabilidad total se expresa así:

$$p(B) = \sum p(B|A_i)p(A_i)$$

La probabilidad de ocurrencia de B es igual a la suma de las probabilidades condicionadas de B a un sistema completo de sucesos A_i multiplicadas por la probabilidad de ocurrencia de cada suceso A_i. Esto nos da el denominador de la regla de Bayes.

Equilibrio bayesiano perfecto

El concepto de equilibrio bayesiano perfecto es un refinamiento con respecto al equilibrio de perfección en el subjuego, que a su vez es un refinamiento del equilibrio de Nash. Así como sólo algunos equilibrios de Nash son también de perfección en el subjuego, sólo algunos equilibrios de perfección en el subjuego son equilibrios bayesianos perfectos.

Las limitaciones del equilibrio de perfección en el subjuego son dos. Por una parte, este concepto no se puede aplicar en aquellos juegos que no tienen otro subjuego que el propio juego, es decir, juegos que no contienen subjuegos más pequeños que el propio juego. Por otra, incluso cuando se puede aplicar, sucede en ocasiones que la aplicación origina equilibrios poco razonables. El equilibrio bayesiano perfecto supera estas dos limitaciones. Se puede aplicar en cualquier juego y, gracias a la incorporación de las creencias en el equilibrio, elimina los equilibrios poco razonables. Hasta el momento el equilibrio de Nash o el de perfección en el subjuego se definían exclusivamente en términos de estrategias. Ahora, el equilibrio bayesiano perfecto se define a partir de estrategias y creencias. Esto complica algo las cosas. Además de comprobar si las estrategias son respuestas óptimas entre sí, hay que comprobar si las estrategias son coherentes con las creencias y si las creencias tienen sentido dadas las estrategias.

La especificación de las creencias se realiza del siguiente modo (según se vio en el capítulo 3). El jugador tiene creencias acerca de su posición en el juego (si no sabe lo que ha hecho su rival antes, ¿está en el nodo derecho o en el izquierdo de su conjunto de información?). Si el jugador se encuentra en un *singleton*, el jugador sabe con exactitud en qué punto del juego se encuentra cuando le toca mover: su creencia de estar en un punto del juego concreto cuando le toca mover tiene probabilidad 1, hay certidumbre. Pero si el conjunto de información cubre más de un nodo, entonces la creencia es una distribución de probabilidad sobre los nodos del conjunto de infor-

mación. Cuando al jugador le toque jugar en un conjunto de información determinado, asignará una probabilidad a cada nodo (cada probabilidad es una creencia de estar en uno de los nodos) de forma que la suma de todas ellas dé 1.

Las estrategias han de cumplir una condición de la máxima importancia, llamada *racionalidad secuencial*. Decimos que las estrategias son secuencialmente racionales si cada acción del jugador es óptima dadas la creencia del jugador y las estrategias de los otros jugadores. La idea de racionalidad secuencial es muy parecida a la de respuesta óptima (véase el capítulo 2), sólo que incorporando las creencias.

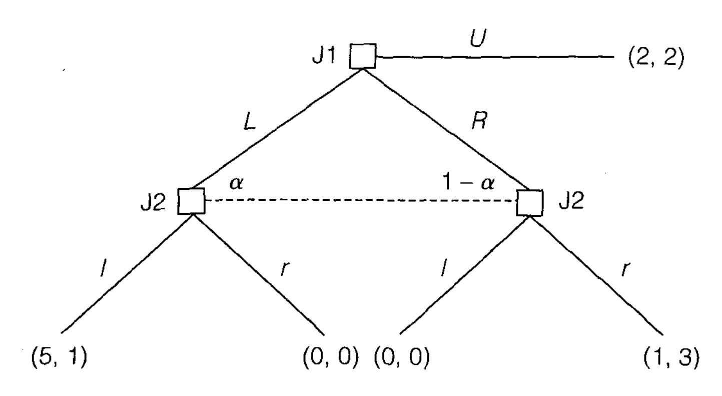
Con todo, la racionalidad secuencial no es suficiente para determinar un equilibrio. Al fin y al cabo, la condición de racionalidad secuencial sólo afecta a las estrategias (dadas las creencias), pero no dice nada de las creencias en sí mismas. Si por un lado las estrategias han de ser secuencialmente racionales, por otro las creencias han de ser racionales. ¿Qué quiere decir que las creencias sean racionales? Aquí hay que hacer una distinción entre conjuntos de información que forman parte de la ruta de equilibrio *(on the equilibrium path)* y conjuntos de información que están fuera de la ruta de equilibrio *(off the equilibrium path)*. En el capítulo 3 se explicó que la ruta de equilibrio es el tramo del juego que se recorre cuando los jugadores juegan sus estrategias de equilibrio. También se dijo que el equilibrio es algo más amplio que la ruta de equilibrio, pues el equilibrio incluye tanto la ruta de equilibrio como las respuestas óptimas que elegirían los jugadores si estuvieran fuera de la ruta de equilibrio. Más técnicamente, la ruta de equilibrio está formada por todos aquellos conjuntos de información en el juego que tienen una probabilidad mayor de 0 de ser alcanzados cuando los jugadores juegan sus estrategias de equilibrio. Si se dice que la probabilidad ha de ser mayor que 0 y no directamente 1 es porque los jugadores pueden emplear estrategias mixtas en equilibrio.

Una vez aclarada la distinción entre lo que está dentro y fuera de la ruta de equilibrio, la racionalidad de las creencias consiste en esto: si las creencias están en la ruta de equilibrio, se determinan en función de las estrategias de equilibrio y de la regla de Bayes; si las creencias están fuera de la ruta de equilibrio, en principio quedan indeterminadas, pero, si es posible, se aplica la regla de Bayes.

Un equilibrio bayesiano perfecto es un conjunto de estrategias y creencias tal que las estrategias son secuencialmente racionales y las creencias son racionales. El problema principal reside en las creencias fuera de la ruta de equilibrio (véase Weingast 1996). Las creencias fuera de la ruta de equilibrio resultan difíciles de tratar, pues son creencias acerca de lo que harían los jugadores si lo que no tiene que suceder sucede. Lo que no tiene que suceder, evidentemente, es que los jugadores se desvíen de su ruta de equilibrio. De todos los refinamientos del equilibrio de Nash, el que menos restricciones impone sobre las creencias fuera de la ruta de equilibrio es el

CUADRO 5.1

UN JUEGO DE INFORMACIÓN IMPERFECTA



equilibrio bayesiano perfecto. Hay otros refinamientos más complejos (como el equilibrio secuencial o el equilibrio perfecto) que corresponden a un nivel más avanzado de teoría de juegos (Morrow 1994: caps. 6-8).

La mejor forma de comenzar a entender el equilibrio bayesiano perfecto y los problemas que producen las creencias fuera de la ruta de equilibrio es mediante el análisis detallado de algún ejemplo. El ejemplo elegido procede de Kreps (1990a: 432-433). En el cuadro 5.1 tenemos el juego en cuestión. Comienza J1, que tiene tres estrategias, *U*, *L* o *R*. Si J1 elige *U*, el juego se acaba. Si elige *L* o *R*, interviene J2, pero J2, cuando le toca jugar, sólo sabe que J1 no ha hecho *U*: lo que no sabe es si ha elegido *L* o *R*. En este juego no se puede aplicar el concepto de equilibrio de perfección en el subjuego, puesto que el único subjuego es el que comienza en el nodo de J1 y por tanto el subjuego coincide con el propio juego. Tampoco se puede aplicar la retroinducción, ya que el conjunto de información de J2 tiene dos nodos.

CUADRO 5.2

EL JUEGO DEL CUADRO 5.1 EN FORMA NORMAL

	l	*r*
U	2, 2	2, 2
L	5, 1	0, 0
R	0, 0	1, 3

Si reducimos el juego a forma normal, como se ha hecho en el cuadro 5.2, se pueden detectar dos equilibrios de Nash, (U; r) y (L; l). Sin embargo, (U; r) no es un equilibrio bayesiano perfecto y no resulta razonable.

Examinemos el equilibrio de Nash (U; r) más detenidamente. Si J1 está seguro de que J2 va a hacer r, la respuesta óptima de J1 es U; y si J2 piensa que J1 va a hacer U, cualquier acción de J2 es una respuesta óptima en la medida en que J2 no llega a jugar. La estrategia de J2 está fuera de la ruta de equilibrio. Sus creencias, por tanto, están indeterminadas. No obstante, podemos plantear la siguiente cuestión: ¿qué creencias de J2 harían que J2 eligiera r frente a l? Digamos que α es la creencia que J2 tiene de estar en el nodo izquierdo de su conjunto de información, y $1 - \alpha$ la creencia de estar en el nodo derecho. La cuestión está en saber qué creencias son compatibles con la elección de la estrategia r. La utilidad esperada de cada estrategia de J2 es:

$$UE_{J2}(l) = \alpha 1 + (1 - \alpha)0 = \alpha$$

$$UE_{J2}(r) = \alpha 0 + (1 - \alpha)3 = (1 - \alpha)3$$

J2 prefiere jugar r frente a l cuando $UE_{J2}(r) > UE_{J2}(l)$. Esto sucede cuando:

$$(1 - \alpha)3 > \alpha$$

Es decir, cuando:

$$\alpha < \frac{3}{4}$$

Esto significa que J2 elige r cuando piensa que la probabilidad de estar en el nodo izquierdo si le tocara jugar es menor de 3/4. ¿Es razonable esta creencia? La respuesta es difícil, puesto que el conjunto de información de J2 está fuera de la ruta de equilibrio y no podemos utilizar entonces las estrategias de equilibrio para determinar las creencias. En esta ocasión, tampoco podemos utilizar la regla de Bayes, porque no hay nada que actualizar ya que J1 juega U y el juego acaba ahí. No obstante, se puede ofrecer el siguiente argumento: si J1 no fuera a elegir U, elegiría L, ya que R le proporciona 1 como mucho y 0 como poco, mientras que L le proporciona 5 como mucho y 0 como poco. Además, R está fuertemente dominada por U. Si J2 se convence de esto, entonces tiene que concluir que si le toca jugar es porque está en el nodo izquierdo, pero si cree con probabilidad 1 que está en el nodo izquierdo, la respuesta óptima es l y no r. Puesto que la creencia de estar en el nodo izquierdo si le toca jugar será 1, r no puede ser una respuesta óptima a U. La creencia $\alpha < 3/4$ no es racional si la estrategia racional de J1 consiste en elegir L y no R cuando decide no jugar U. Así, (U; r), aunque es un equilibrio de Nash, no es un equilibrio bayesiano perfecto: las creencias que hacen

posible ese equilibrio no son coherentes dadas las estrategias de equilibrio propuestas, y al revés, las estrategias de equilibrio propuestas no son coherentes con las creencias de equilibrio.

Si la estrategia racional de J2 es *l*, J1 no jugará *U*, pues *U* no es una respuesta óptima a *l*. Si J1 espera que J2 juegue *l*, J1 jugará *L*. Esto corresponde al segundo equilibrio de Nash, (*L*; *l*). La ruta de equilibrio pasa ahora por el conjunto de información de J2. Por tanto, la creencia de J2 está determinada por las propias estrategias de equilibrio. En concreto, cuando a J2 le toca jugar, sabe con seguridad que está en su nodo izquierdo, de forma que su creencia de equilibrio ha de ser $\alpha = 1$. Si cree que está en su nodo izquierdo, es racional jugar *l*. Cree que está en su nodo izquierdo porque sabe que J1 elige *L* en equilibrio, pues si J1 escoge *L* entonces $\alpha = 1$.

En un caso así de sencillo la aplicación de la regla de Bayes resulta trivial. Sea *A* el estado del mundo "estar en el nodo izquierdo" y $\sim A$ "estar en el nodo derecho". Sea *B* el suceso de que a J2 le llega el momento de jugar. Dado que J2 observa que le toca jugar, actualiza su creencia inicial $p(A)$:

$$p(A|B) = \frac{p(A)p(B|A)}{p(A)p(B|A) + p(\sim A)p(B|\sim A)} = \frac{\alpha 1}{\alpha 1 + (1 - \alpha)0} = 1$$

Las creencias iniciales $p(A)$ y $p(\sim A)$ son α y $1 - \alpha$ respectivamente. En cuanto a $p(B|A)$, la probabilidad de que a J2 le toque jugar si está en su nodo izquierdo, es evidente que dado que el nodo izquierdo está en la ruta de equilibrio (J1 elige *L*), dicha probabilidad ha de ser 1. Por la misma razón, $p(B|\sim A)$ ha de ser 0, pues si a J2 le toca jugar, ha de ser porque J1 jugó antes *L*, luego la probabilidad de estar en el nodo derecho si le toca jugar es 0.

La especificación completa del equilibrio bayesiano perfecto es:

$$(L; l: \alpha = 1)$$

Según esta expresión, J1 juega *L*; J2 juega *l*; la creencia de equilibrio de J2 de estar en el nodo izquierdo cuando le toca jugar es 1. No hace falta indicar las creencias de J1 porque sus conjuntos de información son *singletons*.

En lugar de exponer otros ejemplos similares, a continuación se aplica el equilibrio bayesiano perfecto al caso especial de los juegos de señal. Es con la discusión de esos juegos cuando puede entenderse cómo se realizan los cálculos para hallar este tipo de equilibrio.

Caracterización de un juego de señal

Los juegos de señal que se consideran aquí sólo suponen información incompleta por una de las partes. En concreto, se supondrá que J2 no está

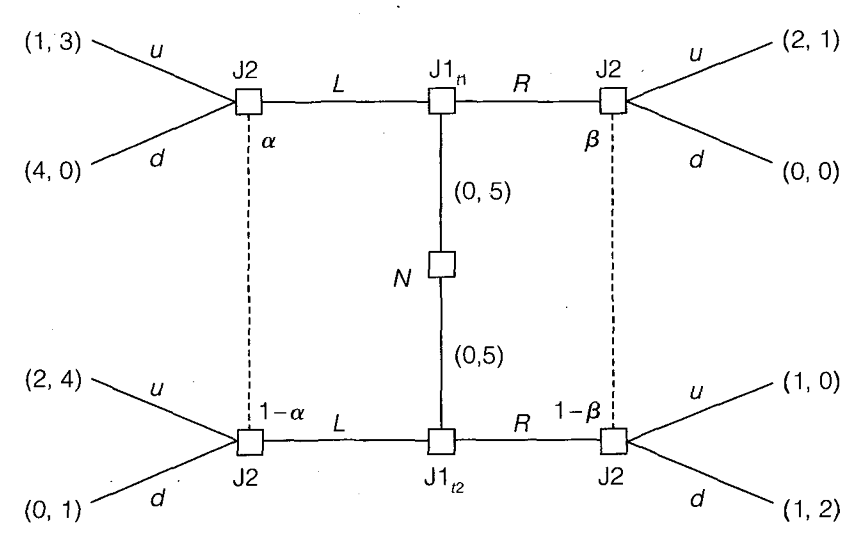
seguro de los pagos de J1, pero J1 conoce sus propios pagos y los de J2. J1, por medio de su actuación, envía una señal a J2 acerca de su verdadera naturaleza. La señal no siempre es informativa. J2, después de observar la acción de J1, puede seguir tan incierto acerca de los pagos de su rival como antes de que J1 actuara. Pero también puede suceder que las acciones de J1 revelen (parcial o completamente) a J2 información acerca de los auténticos pagos de J1. J2 no conoce con certeza los pagos de J1. La forma natural de modelizar esta situación consiste en suponer que cada perfil de pagos constituye un tipo posible de jugador. A fin de simplificar al máximo, vamos a considerar sólo casos en los que J1 puede ser uno de dos tipos diferentes. Cada uno de los dos tipos tiene pagos distintos.

La estructura del juego es la siguiente. Comienza interviniendo Naturaleza. Naturaleza, como se señaló en el capítulo 3, es un actor ficticio que opera como una especie de mecanismo aleatorio. Realmente lo que hace Naturaleza es seleccionar un tipo de los dos tipos posibles de J1 de acuerdo con una distribución de probabilidad. Por ejemplo, Naturaleza selecciona un jugador J1 de tipo I con probabilidad 2/3 y un jugador J1 de tipo II con probabilidad 1/3. J1 sabe qué tipo de jugador es él mismo. J2, en cambio, sólo conoce la distribución de probabilidad de los tipos. Tras Naturaleza, actúa J1. La acción de J1 es lo que cuenta como señal. Luego J2, en función de la señal que J1 haya enviado, actúa a su vez.

En el cuadro 5.3 se ofrece la representación arbórea de un juego de señal procedente de Gibbons (1992: 189) que servirá en la próxima sección como

CUADRO 5.3

JUEGO DE SEÑAL



introducción al análisis de estos juegos. El jugador Naturaleza aparece representado en el centro del juego como N. En este caso, la distribución de probabilidad es {1/2, 1/2} para los dos tipos. Esto es, la probabilidad de que Naturaleza seleccione los tipos de J1 es igual en cada caso. Para distinguir en la representación del juego los dos tipos de J1, escribimos respectivamente $J1_{t1}$ y $J1_{t2}$. $J1_{t1}$ aparece en la parte superior del juego y $J1_{t2}$ en la parte inferior. Las acciones de cada tipo son las mismas, lo único que varía son los pagos. Las acciones de J1 son *L* o *R*. La acción elegida es la señal que J1 manda a J2. J2 observa *L* o *R*. Supongamos que observa *L*. El conjunto de información izquierdo de J2 está formado por dos nodos: esto quiere decir que al observar la señal *L*, J2 puede estar en la parte superior o en la parte inferior del juego. Lo mismo sucede cuando observa *R*. En este ejemplo, J2 puede hacer *u* o *d*. Una vez que juega J2, se realizan los pagos. El primer número, como de costumbre, pertenece a J1 y el segundo a J2. Salta a la vista que los pagos de $J1_{t1}$ y $J1_{t2}$ son distintos.

En el juego del cuadro 5.3 se incluyen las creencias de J2 acerca de J1. Así, α es la creencia de J2 de que cuando observa *L*, J1 sea del tipo $J1_{t1}$. La creencia opuesta es $1 - \alpha$, la creencia de J2 de que cuando observa *L*, J1 sea del tipo $J1_{t2}$. La creencia β es la creencia de J2 de que cuando observa *R*, J1 sea del tipo $J1_{t1}$ y $1 - \beta$ es lo mismo pero con respecto a $J1_{t2}$.

Equilibrios agrupadores y separadores

En un juego de señal las creencias son claves: todo gira en torno a las creencias que J2 se forme a propósito de J1 tras observar la acción de J1. Además, un juego de señal como el representado en el cuadro 5.3 no tiene otro subjuego que no sea el propio juego. Necesitamos entonces el concepto de equilibrio bayesiano perfecto para analizar esta clase de juegos. Los equilibrios bayesianos perfectos en un juego de señal se pueden clasificar de la siguiente manera:

— *Equilibrio agrupador (pooling equilibrium):* todos los tipos de J1 lanzan la misma señal.
— *Equilibrio separador (separating equilibrium):* cada tipo de J1 elige una señal diferente.
— *Equilibrio semiseparador (semiseparating)* o *parcialmente agrupador (partially pooling):* un tipo de J1 lanza una señal y el otro mezcla las señales posibles.

En un *equilibrio agrupador* las señales enviadas por J1 no transmiten información, pues si los dos tipos de J1 hacen lo mismo, cuando le llega el turno a J2, J2 no sabe nada nuevo con respecto a lo que sabía antes de que J1 jugara. Una de las razones por las que puede darse un equilibrio agrupador

consiste en que a pesar de que los pagos que reciben los dos tipos de J1 sean distintos, a uno de los tipos le compense hacerse pasar por el otro tipo, confundiendo a J2.

En un *equilibrio separador* las acciones de cada tipo de J1 son señales que transmiten información. Transmiten información porque los pagos son tales que cada tipo tiene incentivos para hacer algo distinto del otro. En este sentido, cada tipo se "separa" con respecto al otro al elegir estrategias distintas. J2, cuando le llega su turno, sabe si se está enfrentando a $J1_{t1}$ o a $J1_{t2}$. Toda la incertidumbre inicial se disipa.

Finalmente, en un *equilibrio semiseparador* uno de los tipos juega una estrategia pura y el otro una estrategia mixta. En cuanto que la estrategia mixta es una combinación probabilística de estrategias puras, habrá ocasiones en que las estrategias de ambos tipos coincidan y habrá ocasiones en que diverjan. Cuando coincidan no se transmitirá información, cuando diverjan sí.

Supóngase que J2 es una empresa y que J1 es el sindicato de la empresa. J1 tiene que decidir entre hacer una huelga y no hacerla. Vamos a considerar que se trata de un juego de información incompleta. El sindicato puede ser fuerte o débil. Si es fuerte, la huelga tiene éxito, pero si es débil fracasa. La empresa no está segura de si el sindicato es fuerte o débil. Si piensa que el sindicato es fuerte, acepta las demandas, pero si piensa que es débil, las rechaza y fuerza la huelga. Podría pensarse que el sindicato débil siempre tiene incentivos para hacerse pasar por un sindicato fuerte, mandando la misma señal que éste, a fin de conseguir que la empresa conceda lo que piden los trabajadores. Pero esto no siempre es posible. Los equilibrios agrupadores muchas veces no se pueden dar porque las señales son costosas. Si fuera gratis mandar una señal u otra, las señales no transmitirían información. En general, cuanto más costosa sea la señal, mejor discrimina entre los tipos posibles.

Veamos ahora cómo se calculan los equilibrios bayesianos perfectos en el juego del cuadro 5.3. Nos vamos a limitar en este primer ejemplo a examinar equilibrios basados en estrategias puras. El procedimiento es más bien mecánico. Se trata de ir analizando los posibles equilibrios agrupadores y separadores del juego. Hay que considerar dos posibles equilibrios agrupadores (en uno los dos tipos eligen *L*, en otro los dos tipos eligen *R*), y dos posibles equilibrios separadores (en uno $J1_{t1}$ elige *L* y $J1_{t2}$ elige *R*, y en el otro $J1_{t1}$ elige *R* y $J1_{t2}$ elige *L*).

1. Posible equilibrio agrupador en L. Los dos tipos de J1 eligen *L*. Como los dos hacen lo mismo, la señal no transmite información. Si no se transmite información, la creencia inicial de que $J1 = J1_{t1}$ no se altera, sigue siendo 0,5. Una aplicación de la regla de Bayes lo confirma:

$$p(J1_{t1}|L) = \frac{p(J1_{t1})p(L|J1_{t1})}{p(J1_{t1})p(L|J1_{t1}) + p(J1_{t2})p(L|J1_{t2})} = \frac{0{,}5*1}{0{,}5*1 + 0{,}5*1} = 0{,}5$$

Nótese que si L es la estrategia de equilibrio para ambos tipos de J1, la probabilidad de que elijan L condicionada por el tipo será 1.

La respuesta óptima de J2 a L es u, puesto que en el lado izquierdo del juego u domina a d. Para confirmar si jugar L por parte de los dos tipos puede ser un equilibrio, hay que comprobar si alguno de los dos tipos podría estar mejor jugando R. Eso depende de cómo J2 vaya a responder a R, pues ya sabemos que ante L responde siempre con u. Se puede advertir que si J2 respondiera a R con u, $J1_{t1}$ estaría mejor jugando R, pues en tal caso obtendría 2, mientras que si jugara L obtendría 1. Por tanto, para que los dos tipos jueguen L, es necesario que J2, si observara R, respondiera con d y no con u. Para asegurar que eso sea así, tenemos que tratar con β, que ahora es una creencia fuera de la ruta de equilibrio. Puesto que no cabe aplicar la regla de Bayes a β, podemos hacer lo siguiente, calcular el valor de β que satisface:

$$UE_{J2}(d|R) > UE_{J2}(u|R)$$

Las utilidades esperadas son las siguientes:

$$UE_{J2}(d|R) = \beta 0 + (1 - \beta)2 = (1 - \beta)2$$
$$UE_{J2}(u|R) = \beta 1 + (1 - \beta)0 = \beta$$

La primera es mayor que la segunda cuando $\beta \leq 2/3$. Si esa es la creencia de J2, entonces $J1_{t1}$ está mejor jugando L que R. Igualmente, $J1_{t2}$ también está mejor jugando L que R, pues si $J1_{t2}$ hace L y J2 responde con u, $J1_{t2}$ obtiene 2, mientras que si $J1_{t2}$ juega R y J2 responde con d, sólo obtiene 1. Ahora ya podemos especificar bajo qué circunstancias puede haber un equilibrio bayesiano perfecto agrupador en L:

$$\left((L, L); (u, d) : \alpha = 0{,}5, \beta \leq \frac{2}{3}\right)$$

Esto se interpreta del siguiente modo. En primer lugar, aparecen las estrategias de $J1_{t1}$ y $J1_{t2}$ respectivamente: ambos eligen L. Luego vienen las dos estrategias de J2, la respuesta de J2 cuando observa L y la respuesta de J2 cuando observa R. Por último, se indican las creencias racionales de equilibrio: la creencia α, que está en la ruta de equilibrio, es igual a la creencia inicial $p = 0{,}5$, pues los dos tipos de J1 actúan igual; y la creencia β, que está fuera de la ruta de equilibrio, se determina al margen de la regla de Bayes. Al quedar β indeterminada, no podemos hacer más que especificar qué valores de β serían compatibles con el equilibrio propuesto.

2. *Posible equilibrio agrupador en R.* Los dos tipos de J1 eligen R. Pero entonces $\beta = 0{,}5$, pues en la creencia que forma parte de la ruta de equili-

brio no hay transmisión de información alguna. Como 0,5 es menor que 2/3, y acabamos de ver en el supuesto anterior que para J2 d es mejor que u en el lado derecho del juego cuando $\beta < 2/3$, podemos concluir que la respuesta óptima de J2 a R es d. Sin embargo, también hemos visto que si J2 responde con d en el lado derecho del juego, entonces $J1_{t1}$ está mejor jugando L, pues $J1_{t1}$ sabe que si juega L J2 va a responder con u (ya que u domina a d en el lado izquierdo del juego), obteniendo 1, mientras que si juega R y J2 responde con d, sólo obtiene 0. Puesto que $J1_{t1}$ tiene un incentivo para desviarse de R, no puede haber un equilibrio bayesiano perfecto agrupador en R. Esto ya es suficiente para descartar esta posibilidad de equilibrio.

3. *Posible equilibrio separador ($J1_{t1}$ juega L, $J1_{t2}$ juega R).* Si cada tipo de J1 utiliza una estrategia distinta, necesariamente los dos conjuntos de información de J2 forman parte de la ruta de equilibrio y por lo tanto las creencias de J2 quedan determinadas por las estrategias de equilibrio y la regla de Bayes. En realidad, se puede concluir que en esta propuesta de equilibrio $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. Es decir, si J2 observa L, sabe que está en el nodo superior izquierdo, mientras que si observa R sabe que está en el nodo inferior derecho, pues eso es lo que se establece en este equilibrio separador. La aplicación de la regla de Bayes resulta de nuevo trivial. Veámoslo sólo para el caso de α:

$$p(J1_{t1}|L) = \frac{p(J1_{t1})p(L|J1_{t1})}{p(J1_{t1})p(L|J1_{t1}) + p(J1_{t2})p(L|J1_{t2})} = \frac{0{,}5*1}{0{,}5*1 + 0{,}5*0} = 1$$

La respuesta óptima de J2 a L es u y a R es d (teniendo en cuenta que $\alpha = 1$ y $\beta = 0$). ¿Podría esta combinación de estrategias formar parte de un equilibrio? La respuesta es negativa, ya que $J1_{t2}$ sólo obtiene 1 jugando R, mientras que sabe que si jugara L podría obtener 2 (habida cuenta de que J2 siempre responde con u a R). Por lo tanto, es imposible que los tipos de J1 se separen de la forma propuesta. Esto no es un equilibrio.

4. *Posible equilibrio separador ($J1_{t1}$ juega R, $J1_{t2}$ juega L).* Si $J1_{t1}$ juega R y $J1_{t2}$ juega L, las creencias de equilibrio son $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. Dadas esas creencias, ¿cuál es la respuesta óptima de J2? Por lo visto anteriormente, sabemos que si J2 observa L, siempre responde con u. Y si $\beta = 1$, como ese valor es mayor que 2/3, y siempre que $\beta > 2/3$ J2 está mejor jugando u que d tras observar R, J2 juega u. Luego en ambos casos la respuesta óptima es u. Para comprobar si esta combinación de estrategias es un equilibrio, hay que estar seguros de que ninguno de los dos tipos de J1 tiene incentivos para desviarse. A $J1_{t1}$ no le interesa desviarse, pues si juega R obtiene 2, pero si elige L obtiene 1. Igualmente, a $J1_{t2}$ tampoco le interesa desviarse, pues eligiendo L obtiene 2, mientras que si jugara R obtendría 1. Puesto que nadie tiene

incentivos para desviarse de estas estrategias, nos encontramos en presencia de un equilibrio. La especificación completa del equilibrio es:

$$\big((R, L); (u, u) : \alpha = 0, \beta = 1\big)$$

Se interpreta de la siguiente forma: $J1_{t1}$ juega R, $J1_{t2}$ juega L; J2 juega u tanto cuando observa L como cuando observa R; las creencias de equilibrio de J2 son que la probabilidad de estar en el nodo superior izquierdo si observa L es cero y la probabilidad de estar en el nodo superior derecho si observa R es uno.

Por tanto, el juego del cuadro 5.3 tiene dos equilibrios bayesianos perfectos, uno agrupador en L y otro separador en el que $J1_{t1}$ juega R y $J1_{t2}$ juega L. En el primer equilibrio no se transmite información, en el segundo sí.

Aplicación: Democracia y redistribución

A continuación se analiza otro juego de señal con varios equilibrios, incluyendo uno semiseparador. El modelo es más complejo que los analizados hasta el momento. Se trata de una ligera simplificación del modelo que presenta Carles Boix en su estudio sobre democracia y redistribución (2003: cap. 1), que a su vez puede entenderse como una simplificación de los modelos sobre democratización desarrollados por Daron Acemoglu y James A. Robinson, reunidos en su celebrado libro *Economic Origins of Dictatorship and Democracy* (2006). El objetivo del modelo consiste en analizar las condiciones bajo las cuales la democracia puede implantarse. Dichas condiciones tienen que ver con las características de los dos grandes grupos sociales, los ricos y los pobres. Los pobres quieren expropiar los activos de los ricos y repartirse las ganancias entre ellos. Como la distribución de ingresos suele ser asimétrica, habiendo más pobres que ricos, en un sistema democrático los pobres pueden votar a favor de expropiar a los ricos. Los ricos temen que esto suceda y por eso suelen resistirse a la llegada de la democracia.

En realidad, los pobres no pueden expropiar todo cuanto desearían. Depende en buena medida de la movilidad del capital de los ricos. Si el capital tiene baja movilidad (por ejemplo, si consiste fundamentalmente en tierras, que no se pueden transportar de un país a otro), los ricos temen mucho más la llegada de la democracia que si el capital es fácilmente trasladable, pues en este segundo caso la expropiación fiscal dictada por los pobres en una democracia es más baja dada la amenaza de fuga de capitales. Los ricos no pueden amenazar creíblemente con llevarse sus activos del país cuando éstos tienen muy alta movilidad.

Pues bien, la llegada de la democracia va a depender de la relación que haya entre los ingresos que podrían tener los ricos en democracia y los ingresos que podrían seguir teniendo bajo un régimen autoritario. Esa relación se complica por los costes de reprimir a los pobres si éstos demandan democracia y los ricos no aceptan esa demanda. Cuanto más alto sea para los ricos el coste de reprimir la demanda de los pobres, más probable que termine habiendo democracia. Se trata de un juego de información incompleta porque los pobres desconocen si los costes de la represión son altos o bajos, es decir, si los ricos son débiles o fuertes. Hay, por tanto, dos tipos de ricos. Por su parte, los ricos saben todo lo necesario sobre los pobres. Comienza jugando Naturaleza, que selecciona con probabilidad q ricos con coste alto de represión (ricos débiles) y con probabilidad $1 - q$ ricos con coste bajo de represión (ricos fuertes). Las estrategias de los ricos son dos: o bien no reprimir a los pobres (lo que equivale a permitir la democracia) o reprimirlos con un coste r (que puede ser alto, r_a, o bajo, r_b). Si llega la democracia, el juego se acaba. Pero si los ricos reprimen, entonces intervienen los pobres, que pueden hacer dos cosas, aceptar el régimen autoritario, u organizar una revolución que desencadene una guerra civil con un coste g para los ricos superior al coste de la represión, $g > r$. Si los costes de represión son bajos (los ricos son fuertes), los pobres siempre pierden en la revolución. Si son altos (los ricos son débiles), los pobres siempre ganan la revolución y expropian a los ricos. En concreto, expropian todos los activos que no son trasladables, el resto se lo llevan los ricos a otro lugar.

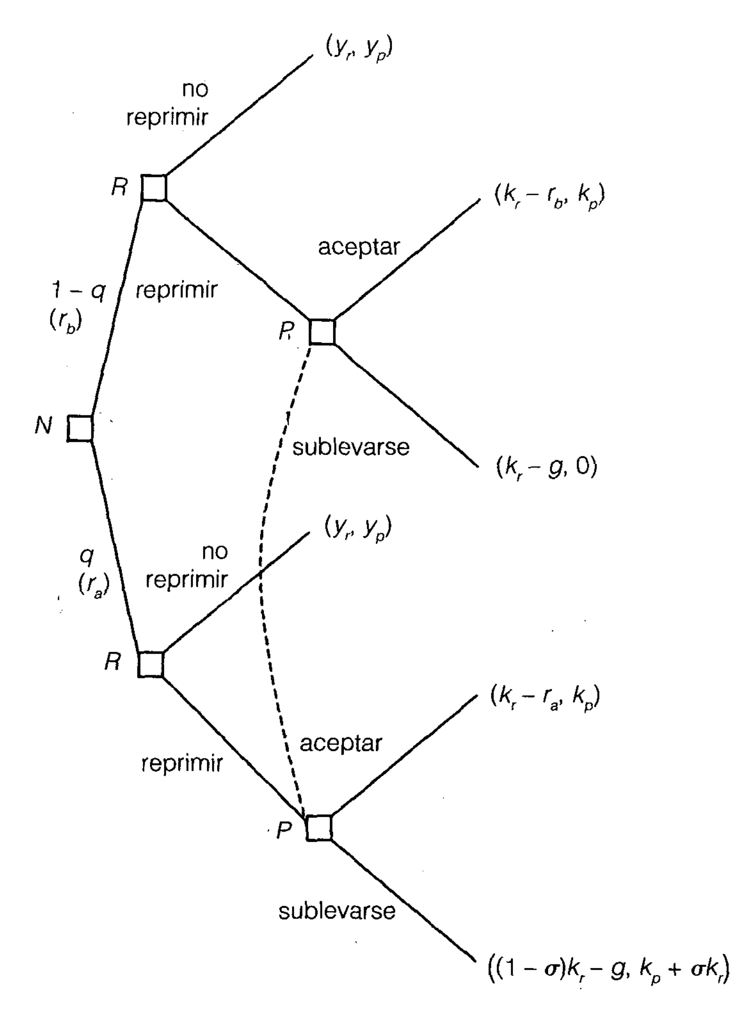
La forma extensiva del juego, así como los pagos de los jugadores, aparecen en el cuadro 5.4. Es preciso aclarar la notación empleada para representar los pagos:

R = ricos, P = pobres.
$y_{R,P}$ = ingresos de los ricos y los pobres después de impuestos en democracia.
$k_{R,P}$ = capital de los ricos y los pobres.
$r_{b,a}$ = coste de la represión, bajo y alto respectivamente.
g = coste de la guerra civil.
σ = movilidad de los activos de los ricos.

Los pagos se explican a continuación. Si los ricos no reprimen, entonces hay democracia, se impone una fiscalidad y cada una de las partes recibe unos ingresos y después de impuestos. Si los ricos reprimen y los pobres no se sublevan, los ricos retienen todo su capital k_R menos el coste de la represión, r (r_a o r_b en función de si son altos o bajos), mientras que los pobres conservan su capital original k_P. Si los pobres se sublevan, el resultado depende de cuál sea el tipo de ricos con los que se enfrentan: si los ricos son fuertes, éstos ganan la guerra civil (a un precio o coste g, $g > r_b$) y obtienen $k_R - g$, quedándose los pobres sin nada, 0. Pero si los ricos son débiles, los pobres ganan la guerra civil. Ahora el pago de los ricos es $(1 - \sigma)\ k_R - g$, es decir, el capital original menos la parte expropiada, menos el coste de la

CUADRO 5.4

LA ESTRUCTURA DEL JUEGO DE LA DEMOCRACIA



guerra civil. En cuanto a los pobres, ahora tienen $k_p + \sigma k_R$, es decir, su capital original más la parte que expropian a los ricos.

Los equilibrios que puede tener este juego dependen de los valores que adopten las variables que figuran en los pagos. Hay que distinguir dos situaciones posibles: cuando los ingresos de los ricos en democracia son superiores a los pagos que reciben en un régimen autoritario tras haber reprimido a los pobres, y cuando son inferiores. A la primera posibilidad la llamaremos Situación A y a la segunda Situación B.

Situación A: $y_R > k_R - r$

Aquí el único equilibrio razonable es un equilibrio agrupador en el que los ricos no reprimen sea cual sea el coste de reprimir y hagan lo que hagan los pobres. Puesto que la democracia ofrece un mejor resultado posible que un régimen autoritario, los ricos no ponen inconveniente a la democracia. El nodo de los pobres está fuera de la ruta de equilibrio (no llegan a jugar) y por lo tanto sus creencias quedan indeterminadas. Consideremos por ejemplo la creencia que hace que los pobres prefieran aceptar a sublevarse en caso de que observen represión:

$$U_p(aceptar) = (1 - q)k_P + qk_P = k_P$$
$$Up(revolución) = (1 - q)0 + q(k_P + \sigma k_R)$$

La primera cantidad es mayor que la segunda cuando la probabilidad de que los ricos sean débiles es suficientemente baja, es decir, cuando $q < \frac{k_P}{k_P + \sigma k_R}$.
El equilibrio resultante sería:

$$\left((\text{no reprimir, no reprimir}); (\text{aceptar, aceptar}): q < \frac{k_P}{k_P + \sigma k_R}\right)$$

Situación B: $y_R < k_R - r_b$

Ahora el pago bajo democracia es inferior para los ricos fuertes al pago en un sistema autoritario. Nótese que aquí no se especifica qué sucede con los ricos débiles, con costes altos de represión. Si los incorporamos, tenemos dos nuevas posibilidades, lo que se va a llamar Situación B1 y Situación B2:

Situación B1: $k_R - r_b > y_R > k_R - r_a$

Aquí los ricos débiles están mejor en democracia que en un régimen autoritario, mientras que los ricos fuertes están mejor en un régimen autoritario que en democracia. En consecuencia, podemos contemplar la posibilidad de un equilibrio separador en el que los ricos con costes bajos reprimen y los ricos con costes altos aceptan la democracia. La estrategia de los pobres es la siguiente: si observan represión, aceptan el régimen porque su creencia de equilibrio es $q = 0$ y en la parte superior del juego, cuando se enfrentan a los ricos fuertes, están mejor aceptando que sublevándose. Si observan democracia, entonces la respuesta dominante de los pobres (fuera de la ruta de equilibrio) es sublevarse, ya que en la parte inferior del juego (con una creencia $q = 1$ si llegan a jugar) siempre es mejor sublevarse que aceptar.

Ningún jugador tiene incentivos para cambiar. Los ricos débiles salen perdiendo si reprimen, pues la respuesta de los pobres es aceptar, que proporciona pagos peores a estos ricos que la democracia. El equilibrio separador, por tanto, sería:

$$[(\text{reprimir, no reprimir}); (\text{aceptar, sublevarse}): q' = 0]$$

Situación B2: $y_R < k_R - r_a < k_R - r_b$

Aquí los dos tipos de ricos están mejor con un sistema autoritario que con uno democrático. En esta situación hay dos equilibrios, uno agrupador y otro semiseparador. Para caracterizar estos equilibrios, hay que determinar en primer lugar bajo qué condiciones los pobres optan por sublevarse frente a aceptar el régimen autoritario. Según se vio antes, los pobres aceptan el régimen cuando $q < \frac{k_P}{k_P + \sigma k_R}$ y hacen la revolución cuando $q \geq \frac{k_P}{k_P + \sigma k_R}$. En función de cuál de las dos inecuaciones se satisfaga, tendremos un equilibrio u otro.

Supongamos primero que es el caso que $q < \frac{k_P}{k_P + \sigma k_R}$. Puesto que los pobres siempre aceptan, los ricos, ya sean débiles o fuertes, siempre reprimen. Esto da lugar a un equilibrio agrupador, en el que nadie tiene incentivos para cambiar de estrategia. Por un lado, los ricos siempre están mejor en la situación B2 en un régimen autoritario que en uno democrático, ya sean débiles o fuertes, y saben que si reprimen los pobres van a aceptar el régimen autoritario; por otro lado, los pobres no pueden actualizar sus creencias si los dos tipos de ricos se comportan igual. Como hemos supuesto que dada su creencia inicial les compensa aceptar frente a sublevarse, aceptan el régimen autoritario. El equilibrio lo podemos caracterizar así:

$$\left[(\text{reprimir, reprimir}); (\text{aceptar, aceptar}): q < \frac{k_P}{k_P + \sigma k_R}\right]$$

Supongamos ahora que la creencia inicial de los pobres es la contraria, es decir, prefieren sublevarse porque $q \geq \frac{k_P}{k_P + \sigma k_R}$. No puede haber un equilibrio agrupador, puesto que los ricos fuertes saben que ganarán la guerra civil si hay sublevación, mientras que los ricos débiles saben que la perderán. Tampoco puede haber un equilibrio separador, pues si los ricos débiles nunca reprimen, los pobres nunca se sublevan cuando observan represión (deduciendo de la represión que están en presencia de ricos fuertes) y en tal caso los ricos débiles tendrían incentivos para hacerse pasar por ricos fuertes reprimiendo. Sólo queda la posibilidad de un equilibrio semiseparador,

en el que los ricos fuertes siempre reprimen, y los ricos débiles mezclan sus estrategias entre reprimir y no reprimir. Para que los ricos débiles puedan utilizar una estrategia mixta, han de ser indiferentes entre reprimir y no reprimir, lo que sólo se puede lograr si los pobres, por su parte, juegan también una estrategia mixta. Para que los pobres puedan utilizar una estrategia mixta, han de ser indiferentes entre sublevarse y aceptar sabiendo que los ricos fuertes siempre reprimen y que los ricos débiles lo hacen sólo con cierta probabilidad.

¿Bajo qué condiciones son los pobres indiferentes? Cuando su creencia de equilibrio, a la que llamaremos β, es tal que la utilidad esperada de aceptar y sublevarse es la misma. Es decir, cuando:

$$\beta = \frac{k_P}{k_P + \sigma k_R}$$

Por otra parte, la creencia β, es decir, la creencia de que los ricos son débiles (los costes de represión son altos) dado que se observa represión, ha de poder determinarse por la regla de Bayes tal como se indica a continuación:

$$\beta = \Pr(r = r_a | represión) = \frac{p(r = r_a)p(represión|r = r_a)}{p(r = r_a)p(represión|r = r_a) + p(r = r_b)p(represión|r = r_b)}$$

Llamemos p_a a la probabilidad de que los ricos débiles ($r = a$) repriman. En tal caso, la expresión anterior se puede reescribir así:

$$\beta = \frac{qp_a}{qp_a + (1 - q)1}$$

Juntando las dos ecuaciones que se derivan de β, tenemos que:

$$\frac{qp_a}{qp_a + (1 - q)} = \frac{k_P}{k_P + \sigma k_R}$$

Gracias a esta ecuación, podemos despejar ahora p_a:

$$p_a = \frac{k_P(1 - q)}{q\sigma k_R}$$

Por tanto, siempre que los ricos débiles repriman con esa probabilidad, los pobres son indiferentes entre aceptar y sublevarse. Falta calcular la estrategia mixta de los pobres que hace indiferentes a los ricos débiles entre repri-

mir y no reprimir. Sea p_r la probabilidad de que los pobres se subleven. Las utilidades esperadas de los ricos débiles son:

$$UE_{R(r=r_a)}(no\ reprimir) = y_R$$

$$UE_{R(r=r_a)}(reprimir) = p_r((1-\sigma)k_R - g) + (1-p_r)(k_R - r_a)$$

Si igualamos ambas expresiones y despejamos p_r, queda la siguiente expresión:

$$p_r = \frac{(k_R - r_a) - y_R}{\sigma k_R + g - r_a}$$

Podemos poner todos los elementos juntos y definir así el equilibrio semiseparador:

$$\left[\left(reprimir,\ \frac{k_P(1-q)}{q\sigma k_R}\ reprimir\right);\left(\frac{(k_R - r_a) - y_R}{\sigma k_R + g - r_a}\ revolución\right) : \beta = \frac{k_P}{k_P + \sigma k_R}\right]$$

En este equilibrio hay una cierta probabilidad de que se produzca una guerra civil, resultado que era imposible en los anteriores equilibrios separadores y agrupadores.

Del análisis de estos equilibrios se derivan resultados de estática comparativa, es decir, enunciados contrastables empíricamente sobre cómo aumenta o disminuye la probabilidad de que los países tengan democracias cuando varían los parámetros del modelo como la especificidad del capital, el coste de la represión, el coste de la guerra civil, y las dotaciones iniciales de capital. Para un análisis de la puesta a prueba del modelo, se puede consultar Boix (2003).

Juegos repetidos de información incompleta: Reputación

Uno de los desarrollos más interesantes de la teoría de juegos, con múltiples aplicaciones posibles en las ciencias sociales, consiste en el análisis de la reputación. La necesidad de desarrollar algún tipo de reputación (reputación de ser una persona cooperadora, de llevar siempre a cabo las amenazas, de no ceder nunca, etc.) supone necesariamente información incompleta. Si en un juego J1 lo sabe todo acerca de J2, entonces J2 no tiene posibilidad de desarrollar ningún tipo de reputación. Es decir, si J1 conoce los pagos de J2, si hay información completa, J2 no puede desarrollar reputación de ser un tipo de jugador distinto del que en realidad es. La reputación tiene sentido cuando J1 no está seguro acerca de los pagos de J2 y J2 decide aprovechar

esa incertidumbre para crearse una cierta clase de reputación. Entiéndase bien lo que esto significa: J2 sabe qué tipo de jugador es, pero J2 comprende que puede recibir más utilidad si hace creer a J1 que en realidad es un tipo de jugador distinto del que verdaderamente es.

Que haya información incompleta es una condición necesaria pero no suficiente para que un jugador pueda labrarse una cierta reputación. Es preciso además que el juego se repita a lo largo del tiempo. Si la interacción entre J1 y J2 sólo se produce una vez, ninguno de los dos jugadores tiene incentivos para tratar de hacerse pasar por lo que no es, ya que no podrá aprovechar en el futuro la reputación creada. En cuanto que la inversión en reputación es costosa en el corto plazo, hace falta que el juego se repita para que el jugador pueda hacer uso de su reputación y termine compensándole dicha inversión.

La reputación se puede desarrollar en contextos muy variados. No hay por qué limitarse a la interacción repetida entre J1 y J2 (véase Kreps 1990b). Supongamos que J1 es un vendedor y que J2 es un conjunto (A, B, C...) de compradores. Aunque J1 interactúa con cada comprador sólo una vez, le trae a cuenta desarrollar reputación si los compradores observan las acciones de J1. Es decir, si B, C, D... observan cómo J1 actúa con A, aunque J1 sepa que con A no va a volver a encontrarse, J1 podrá usar dicha acción para construirse una reputación que luego haga valer cuando le toque jugar con B, C, D...

En el capítulo 4 ya se hizo alusión al papel que la reputación puede desempeñar en ciertos modelos si se quiere conseguir que los resultados de la teoría de juegos coincidan con la realidad. Así, cuando se explicó que en un juego repetido n veces (un Ciempiés, un Dilema del Prisionero) el único equilibrio de Nash es la no cooperación, se añadía que una posible salida consistía en suponer que el juego es de información incompleta. Si J2 piensa que hay una probabilidad pequeña de que J1 no sea un jugador estrictamente racional, *J1 puede comenzar cooperando en un* Dilema del Prisionero jugado n veces. Incluso si J1 es estrictamente racional, le interesa hacer creer a su rival que es irracional, de forma que J2 continúe cooperando. La razón por la cual observaríamos formas de cooperación en estos juegos es que hay un pequeño margen de incertidumbre acerca de la verdadera naturaleza de uno de los jugadores.

A continuación se hace una presentación formal de esta idea. Siguiendo una versión simplificada de la exposición de Gibbons (1992: 224-232), cabe mostrar la importancia de la reputación en un Dilema del Prisionero (DP) jugado tan sólo tres veces. Para evitar entrar en detalles técnicos, Gibbons propone el siguiente artificio: J2 es un jugador racional que no está seguro acerca de la racionalidad de J1, pero Gibbons, en lugar de proponer varios pagos posibles de J1, considera que la irracionalidad se ejerce en la *elección de estrategias*: con probabilidad p, J1 juega la estrategia toma-y-daca, mientras que con probabilidad $1 - p$ J1 es estrictamente racional. ¿Por qué es irracio-

nal jugar toma-y-daca desde la primera ronda si en el capítulo anterior se vio que el par de estrategias formado por toma-y-daca es un equilibrio de Nash? En realidad, ese par de estrategias sólo es un equilibrio si el DP se repite indefinidamente. Si el juego se juega un número finito de veces, toma-y-daca no puede ser un equilibrio: aplicando el razonamiento de la retroinducción es evidente que no puede ser racional comenzar cooperando, puesto que el agente sabe que en la última ronda el rival va a defraudar. Anticipando esto, la conclusión, como se explicó en el capítulo anterior, es que la única estrategia racional es defraudar siempre. Por tanto, si el juego se juega n veces, la estrategia toma-y-daca no puede ser un equilibrio.

CUADRO 5.5

EL DILEMA DEL PRISIONERO

	C	*D*
C	1, 1	–2, 2
D	2, –2	0, 0

Vamos a partir del DP que se especifica en el cuadro 5.5. Además, supondremos que no hay factor de descuento o, si se prefiere, que $\delta = 1$ para ambos jugadores. Si hay información incompleta como la que se acaba de especificar, es posible que haya un equilibrio en el que J1 (ya sea racional o irracional) y J2 comienzan cooperando, en oposición a lo que sucede si hay información completa. En concreto, se demuestra a continuación que las estrategias que aparecen en el cuadro 5.6 son un equilibrio bayesiano perfecto.

Cuando J1 es irracional, comienza cooperando, pues al fin y al cabo eso es lo que establece la estrategia toma-y-daca. A partir de ese momento, J1 irracional imita la acción de J2 en la ronda anterior. Así, J1 irracional coopera en la última ronda porque J2 ha cooperado en la penúltima. Por su parte, J1 racional empieza cooperando para crearse reputación de cooperador, explotando así la incertidumbre de J2 acerca de la verdadera naturaleza de J1. Luego, en la segunda ronda, tras haber engañado a J2, revela su auténtica condición defraudando y, siendo racional, defrauda también en la última ronda. En cuanto a J2, éste comienza cooperando y tras observar que J1 coopera en la primera ronda, decide volver a cooperar en la segunda ronda, aunque en la tercera concluye defraudando.

Para comprobar que esta combinación de movimientos es un equilibrio, podemos fijarnos nada más en J1 racional y en J2: las acciones de J1 irracional están dadas, en el sentido de que consideramos que J1 irracional aplica mecánicamente toma-y-daca. Hay que demostrar ahora que a J1 racional le

CUADRO 5.6

TRES RONDAS DE UN DP CON INFORMACIÓN INCOMPLETA

	t = 1	*t* = 2	*t* = 3
J1 (toma-y-daca)	*C*	*C*	*C*
J1 (racional)	*C*	*D*	*D*
J2	*C*	*C*	*D*

conviene comenzar cooperando. La utilidad esperada de comenzar cooperando dadas las acciones del cuadro 5.6 para J1 racional es:

$$UE_{J1\ racional}(C_{t=1}, D_{t=2}, D_{t=3}) = 1 + 2 + 0 = 3$$

La única desviación concebible para este jugador sería defraudar en todos los casos, olvidándose de imitar la estrategia de J1 irracional. Si defrauda siempre la utilidad esperada sería:

$$UE_{J1\ racional}(D_{t=1}, D_{t=2}, D_{t=3}) = 2 + 0 + 0 = 2$$

Como esta utilidad esperada es menor que la anterior, se puede concluir que J1 racional está mejor desarrollando reputación de cooperador en la primera ronda. Nótese por lo demás que la desviación consistente en jugar ($C_{t=1}$, $C_{t=2}$, $D_{t=3}$) siempre da peor resultado que hacer ($C_{t=1}$, $D_{t=2}$, $D_{t=3}$). Ahora podemos pasar a las acciones de J2. Hay que comprobar si J2 podría estar mejor que cuando coopera en las dos primeras rondas y defrauda en la tercera. Aquí caben dos tipos de desviaciones. La primera desviación es defraudar en todas las rondas. El juego, por tanto, se jugaría como se indica en el cuadro 5.7. Ahora de lo que se trata es de determinar con cuál de las dos estrategias J2 está mejor.

CUADRO 5.7

PRIMERA DESVIACIÓN DEL EQUILIBRIO

	t = 1	*t* = 2	*t* = 3
J1 (toma-y-daca)	*C*	*D*	*D*
J1 (racional)	*C*	*D*	*D*
J2	*D*	*D*	*D*

La utilidad esperada para J2 si coopera en las dos primeras rondas y defrauda en la tercera (cuadro 5.6) es:

$$UE_{J2}(C_{t=1}, C_{t=2}, D_{t=3}) = 1 + [p1 + (1-p)(-2)] + [p2 + (1-p)0] = 5p - 1$$

Mientras que en la ronda 1 es seguro que J1 coopera, sea cual sea su naturaleza, en las rondas 2 y 3 el comportamiento de cada tipo de J1 es distinto y por eso hay que introducir la probabilidad de cada tipo de J1 en los cálculos de utilidad de J2. Por otro lado, la utilidad esperada de desviarse defraudando siempre (cuadro 5.7) es:

$$UE_{J2}(D_{t=1}, D_{t=2}, D_{t=3}) = 2 + 0 + 0 = 2$$

Como en el cuadro 5.7 los dos tipos de J1 actúan igual, ahora no interviene la creencia de J2 acerca de la irracionalidad de J1. Pues bien, a J2 no le compensa esta desviación cuando $5p - 1 > 2$, o lo que es igual, cuando $p > 3/5$. Si la probabilidad de que J1 sea irracional es alta, por encima de 3/5, entonces a J2 no le convendría desviarse, pues si no se desvía (cuadro 5.6) sabe que es bastante probable que durante las dos primeras rondas los dos jugadores cooperen y que en la última J2 pueda engañar a J1 irracional, mientras que si J2 se desvía (cuadro 5.7) habiendo una probabilidad mayor de 3/5 de que J1 sea irracional, engaña a J1 en la primera ronda, pero a partir de ahí está garantizado que ambos jugadores defraudan hasta el final.

La segunda desviación posible de J2 que rompería el equilibrio representado en el cuadro 5.6 consistiría en que J2 defraudara en la primera ronda, cooperando en la segunda y defraudando en la tercera. La secuencia del juego ahora correspondería a lo que se presenta en el cuadro 5.8. J2 siempre engañaría a J1 en la primera ronda, J2 se dejaría engañar en la segunda ronda, y en la tercera engañaría a J1 si éste es irracional.

CUADRO 5.8

SEGUNDA DESVIACIÓN DEL EQUILIBRIO

	t = 1	*t* = 2	*t* = 3
J1 (toma-y-daca)	*C*	*D*	*C*
J1 (racional)	*C*	*D*	*D*
J2	*D*	*C*	*D*

La utilidad esperada de J2 es:

$$UE_{J2}(D_{t=1}, C_{t=2}, D_{t=3}) = 2 +(-2) + [p2 + (1 - p)0] = 2p$$

Para que esa desviación no compense, tiene que suceder que $5p - 1 > 2p$, es decir, que $p > 1/3$. Por lo visto hasta aquí, se sigue que si la probabilidad de que J1 sea irracional es mayor que 3/5, la combinación de estrategias del cuadro 5.6 es un equilibrio. Ese equilibrio, recuérdese, consiste en que J2 coopera en las dos primeras rondas y defrauda en la tercera, J1 irracional coopera en las tres rondas, y J1 racional coopera en la primera creándose reputación de irracional para pasar a defraudar en las dos siguientes.

Cuantas más veces se repita el DP, menor es la probabilidad p necesaria para que a J1 racional le compense invertir en reputación de cooperador irracional. Nótese que la reputación es un activo frágil: en cuanto un agente se desvía en una ocasión con sus acciones de su reputación, ésta se volatiliza. En el equilibrio del cuadro 5.6 que se está considerando, es evidente que una vez que en la segunda ronda J2 observa que J1 defrauda, J2 está seguro de que J1 es racional. Aplicando la regla de Bayes, el cálculo sería éste:

$$p(\text{J1 } racional|D_{t=2}) = \frac{p(\text{J1 } racional)p(D_{t=2}|\text{J1 } racional)}{p(\text{J1 } racional)p(D_{t=2}|\text{J1 } racional) + p(\text{J1 } irracional)p(D_{t=2}|\text{J1 } irracional)} = \frac{(1-p)1}{(1-p)1 + p0} = 1$$

Si J1 defrauda en la segunda ronda, J2 inmediatamente concluye que J1 es racional. La reputación creada en la primera ronda desaparece en la segunda en cuanto J1 defrauda.

Este breve análisis de la idea de reputación permite integrar casi todos los elementos que han ido apareciendo en los capítulos anteriores, puesto que estamos realizando cálculos de utilidad (capítulo 1) sobre un juego en forma normal (capítulo 2) que se repite a lo largo del tiempo (capítulo 4) bajo condiciones de información incompleta (capítulo 5). La teoría de juegos puede llegar a dar cuenta de interacciones sociales con un alto nivel de complejidad según se ha visto a propósito de la reputación. Ahora bien, conforme aumenta la complejidad del contexto estratégico, aumenta también la dificultad analítica de la teoría de juegos. Mientras que la primera noción de equilibrio expuesta, la del equilibrio de Nash, depende de pocos supuestos y resulta transparente y fácil de entender, las sucesivas nociones de equilibrio que ha sido preciso especificar para abordar juegos más ricos que los juegos en forma normal son más discutibles y se basan en una racionalidad muy exigente: basta recordar las condiciones sobre racionalidad de las creencias que impone el equilibrio perfecto bayesiano. En este sentido, hay claramente

una relación inversa entre la riqueza y el detalle de los contextos estratégicos que se quieren estudiar por un lado, y la simplicidad y elegancia de los modelos formales de teoría de juegos por otro. El presente libro, debido a su naturaleza introductoria, se ha centrado sobre todo en situaciones estratégicas que pudieran ser abordadas mediante modelos simples. A partir de este punto, el lector puede comenzar un estudio más pormenorizado y más técnico de la teoría de juegos que le abra el camino para el análisis de contextos de interacción estratégica más complejos.

Glosario

árbol de decisión: gráfico arbóreo compuesto de nodos y ramas que representa la secuencia de jugadas, los pagos de los jugadores y la información que éstos tienen. La regla fundamental de construcción del árbol es que cada nodo sólo puede tener un predecesor.

aversión al riesgo: el agente prefiere el valor esperado de una lotería a jugar la lotería.

compromiso *(commitment)*: una manipulación del conjunto de alternativas que permite al agente conseguir un resultado que en ausencia del compromiso no sería posible. Manipulación significa que o bien el agente elimina alguna de sus alternativas disponibles o bien se impone a sí mismo costes sobre algunas de las alternativas.

conjunto de información: partición de los nodos no terminales. Indica el grado de información que tiene el jugador sobre las elecciones previas de los otros jugadores.

dominación: una estrategia S_1 domina *fuertemente* a otra estrategia S_2 si S_1 siempre produce mejores pagos que S_2 haga lo que haga el rival. Una estrategia S_1 domina *débilmente* a otra estrategia S_2 si S_1 nunca produce peores resultados que S_2 y al menos en un caso produce mejores resultados.

dominación repetida: procedimiento por el cual se van eliminando del juego todas las estrategias fuerte o débilmente dominadas.

equilibrio agrupador *(pooling equilibrium)*: en un juego de señal se produce un equilibrio agrupador cuando todos los tipos posibles de un jugador eligen la misma estrategia.

equilibrio bayesiano perfecto: un conjunto de estrategias y creencias tales que las estrategias son secuencialmente racionales y las creencias son racionales. Las creencias se determinan según las estrategias de equilibrio y según la regla de Bayes (cuando es posible).

equilibrio semiseparador *(semiseparating equilibrium)*: en un juego de señal se produce un equilibrio semiseparador cuando un tipo posible de un jugador elige una estrategia y el otro tipo mezcla las estrategias

posibles, coincidiendo a veces con el primer tipo y distinguiéndose de él en otras.

equilibrio separador ***(separating equilibrium)***: en un juego de señal se produce un equilibrio separador cuando cada tipo posible de un mismo jugador elige una estrategia distinta.

equilibrio de Nash: combinación de estrategias que son respuestas óptimas las unas con respecto a las otras.

equilibrio de perfección en el subjuego: combinación de estrategias que es un equilibrio de Nash en cada uno de los subjuegos que componen el juego.

estrategia: un plan completo de acción.

estrategia condicional: estrategia en la que el jugador elige una acción u otra en función del comportamiento del rival observado hasta ese momento.

estrategia mixta: una distribución de probabilidad sobre estrategias puras.

estrategia pura: una estrategia en la que no intervienen elecciones probabilísticas.

factor de descuento: es un coeficiente entre 0 y 1 que refleja cuánto valoramos ahora un pago que vamos a recibir en el periodo siguiente.

función de utilidad: regla que asigna números (ordinales o cardinales) a un orden de preferencias.

función de utilidad Von Neumann-Morgenstern: función de utilidad cardinal en la que la intensidad de las preferencias se mide a través del riesgo que está dispuesto a asumir el agente por conseguir la mejor opción posible frente a obtener una opción intermedia con seguridad.

incertidumbre: una decisión se toma bajo incertidumbre cuando no se sabe a ciencia cierta las consecuencias de la decisión y no hay probabilidades objetivas de la ocurrencia de cada consecuencia.

juego de información imperfecta: juego en el que al menos un conjunto de información cubre más de un nodo.

juego de información perfecta: juego en el que todos los conjuntos de información son *singletons*.

juego de referencia ***(stage game)***: estructura del juego que se repite a lo largo del tiempo.

juego de señal: juego en el que al menos uno de los jugadores desconoce los pagos verdaderos de su rival y las acciones del rival pueden transmitir información sobre dichos pagos.

juego en forma extensiva: juego en el que se representa la secuencia de elecciones de los jugadores y la información que éstos tienen en las distintas fases del juego.

juego en forma normal: juego en el que los jugadores eligen simultáneamente o cada uno elige sin saber qué han elegido los demás.

lotería: emparejamiento de probabilidades y consecuencias. Se asigna una probabilidad a cada consecuencia.

neutralidad al riesgo: el agente es indiferente entre jugar una lotería y recibir el pago esperado de una lotería.

nodo: punto del juego en el que un jugador tiene que tomar una decisión.

nodo terminal: un punto del juego del que no sale ninguna rama. Indica el final del juego. Los pagos de los jugadores se representan en los nodos terminales.

propensión al riesgo: el agente prefiere jugar una lotería a obtener el valor esperado de esa lotería.

racionalidad secuencial: las estrategias son secuencialmente racionales si cada acción del jugador es óptima dadas la creencia del jugador y las estrategias de los otros jugadores.

regla de Bayes: actualiza racionalmente el contenido de una creencia inicial a la luz de nueva información relevante.

reputación: creencia de los demás jugadores acerca del tipo de un jugador como consecuencia de las acciones que ha llevado a cabo hasta el momento ese jugador. Sólo tiene sentido en contextos de información incompleta en los que el juego se repite.

respuesta óptima: una estrategia es una respuesta óptima a una estrategia dada del rival si proporciona mejores resultados que cualquier otra posible estrategia.

retroinducción: procedimiento que se puede aplicar en los juegos de información perfecta en virtud del cual se van eliminando sucesivamente estrategias dominadas. Se comienza por los nodos previos a los nodos terminales y se va avanzando hacia atrás: el proceso concluye cuando se alcanza el nodo inicial del juego.

riesgo: una decisión se toma bajo riesgo cuando no hay certidumbre pero se pueden estimar probabilidades objetivas sobre la ocurrencia de las diversas consecuencias posibles de la decisión.

ruta de equilibrio: desarrollo del juego según resulta de llevar a cabo las estrategias que constituyen el equilibrio. La ruta de equilibrio está formada

por todos aquellos nodos que tienen una probabilidad superior a 0 de ser alcanzados.

singleton: conjunto de información formado por un único nodo.

situación estratégica: cuando las consecuencias de las acciones de cada uno de los jugadores dependen, aparte de parámetros, de las acciones de los otros jugadores.

situación paramétrica: cuando las consecuencias de la acción del agente sólo dependen de parámetros y los valores de estos parámetros son independientes de su elección. Las situaciones paramétricas pueden ser de certidumbre, riesgo o incertidumbre.

subjuego: una parte del juego que comienza con un nodo inicial e incluye todos los nodos sucesores de ese nodo inicial. El subjuego se puede considerar como un juego en sí mismo. El subjuego más amplio posible coincide, en el límite, con el propio juego.

supuesto de racionalidad: un agente es racional cuando, al elegir entre las alternativas disponibles, elige en función de sus preferencias y éstas constituyen un orden débil (son completas, reflexivas y transitivas).

utilidad: medida numérica que se asigna a las preferencias.

utilidad esperada: suma ponderada de la utilidad que tienen los distintos resultados que pueden darse con cada estado del mundo. La ponderación se realiza con la probabilidad de ocurrencia de cada estado del mundo. Se multiplica dicha probabilidad por la utilidad del resultado correspondiente y todos esos productos se suman, dando como resultado la utilidad esperada de una acción.

Bibliografía

ACEMOGLU, Daron y James A. ROBINSON (2006). *Economic Origins of Dictatorship and Democracy.* Cambridge: Cambridge University Press.

ALESINA, Alberto (1988). "Credibility and policy convergence in a two-party system with rational voters", *American Economic Review*, 78: 796-805.

AXELROD, Robert (1984). *The Evolution of Cooperation.* Nueva York: Basic Books. (Hay traducción española en Alianza, 1986.)

BAIRD, Douglas G., Robert H. GERTNER y Randal C. PICKER (1994). *Game Theory and the Law.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

BARON, David P. y John FEREJOHN (1987). "Bargaining and agenda formation in legislatures", *American Economic Review*, 72, 2: 303-309.

BARRO, Robert J. y David B. GORDON (1983). "Rules, discretion and reputation in a model of monetary policy", *Journal of Monetary Economics*, 12: 101-121.

BAWN, Kathleen (1997). "Constructing "Us": Ideology, coalition politics, and false Consciusness", *American Journal of Political Science*, 43, 3: 303-334.

BINMORE, Ken (1992). *Fun and Games: A Text on Game Theory.* Lexington: Heath.

BOIX, Carles (2003). *Democracy and Redistribution.* Cambridge: Cambridge University Press.

BREEN, Richard y John GOLDTHORPE (1997). "Explaining educational differentials: Towards a formal rational action theory", *Rationality & Society*, 9, 3: 275-305.

CALVERT, Randall (1995). "Rational actors, equilibrium and social institutions". En J. Knight (ed.), *Explaining Social Institutions.* Ann Arbor: University of Michigan Press.

CAMERER, Colin F. (ed.) (2003). *Behavioral Game Theory. Experiments in Strategic Interaction.* Princeton: Princeton University Press.

COLEMAN, James S. (1990). *Foundations of Social Theory.* Cambridge, Mass: Belknap Press.

DOWNS, Anthony (1957). *An Economic Theory of Democracy.* Nueva York: Harper and Row.

DUTTA, Prajit K. (1999). *Strategies and Games.* Cambridge, Mass.: The MIT Press.

FEARON, James D. (1998). "Commitments problems and the spread of ethnic conflict". En D. A. Lake y D. Rotchild (eds.), *The International Spread of Ethnic Conflict*, pp. 107-126. Princeton: Princeton University Press.

GEDDES, Barbara (1991). "A game-theoretic model of reform in Latin American democracies", *American Political Science Review*, 85: 371-392.

GIBBONS, Robert (1992). *Game Theory for Applied Economists.* Princeton: Princeton University Press.

GINTIS, Herbert (2000). *Game Theory Evolving. A Problem-Centered Introduction to Modeling Strategic Interaction.* Princeton: Princeton University Press.

GOLDTHORPE, John H. (2000). *On Sociology: Numbers, Narratives, and the Integration of Research and Theory*. Oxford: Oxford University Press.

GREEN, Donald e Ian SHAPIRO (1994). *Pathologies of Rational Choice*. New Haven: Yale University Press.

HARSANYI, John y Richard SELTEN (1988). *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*. Cambridge, Mass.: The MIT Press.

HECKATHORN, Douglas D. (1996). "The dynamics and dilemmas of collective action", *American Sociological Review*, 61, 2: 250-277.

KAHNEMAN, Daniel y Amos TVERSKY (eds.) (2000). *Choices, Values, and Frames*. Cambridge: Cambridge University Press.

KREPS, David (1990a). *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton: Princeton University Press.

— (1990b). "Corporate culture and economic theory". En J. Alt y K. Shepsle (eds.), *Perspectives on Positive Political Economy*, pp. 90-143. Cambridge: Cambridge University Press.

— (1990c). *Game Theory and Economic Modeling*. Oxford: Oxford University Press.

KUHN, Harold W. (ed.) (1997). *Classics in Game Theory*. Princeton: Princeton University Press.

KYDLAND, Finn E. y Edward C. PRESCOTT (1977). "Rules rather than discretion: the time inconsistency of optimal plans", *Journal of Political Economy*, 85: 473-491.

LANGE, Peter y George TSEBELIS (1993). "Wages, strikes and power: An equilibrium analysis". En W. J. Booth, P. James y H. Meadwell (eds.), *Politics and Rationality*. Cambridge: Cambridge University Press.

MARWELL, Gerald y Pamela OLIVER (1993). *The Critical Mass in Collective Action*. Cambridge: Cambridge University Press.

MAYNARD SMITH, John (1982). *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge: Cambridge University Press.

MEDINA, Luis Fernando (2007). *A Unified Theory of Collective Action and Social Change*. Ann Arbor: University of Michigan Press.

MONROE, Kristen Renwick (ed.) (2005). *Perestroika. The Raucous Rebellion in Political Science*. New Haven: Yale University Press.

MORROW, James (1994). *Game Theory for Political Scientists*. Princeton: Princeton University Press.

MORTON, Rebecca B. (1999). *Methods and Models*. Cambridge: Cambridge University Press.

MUTHOO, Abhinay (1999). *Bargaining. Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press.

NASH, John F. (1996). *Essays on Game Theory*. Cheltenham: Edward Elgar.

NEUMANN, John von y Oskar MORGENSTERN (1980 3ª [1944]). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press.

OSBORNE, Martin y Ariel RUBINSTEIN (1990). *Bargaining and Markets*. San Diego: Academic Press.

— y — (1994). *A Course in Game Theory*. Cambridge, Mass.: The MIT Press.

RAPOPORT, Anatol y Albert M. CHAMMAH (1970). *Prisoner's Dilemma*. Ann Arbor: University of Michigan Press.

RIKER, William (1992). "The entry of game theory in political science". En R. E. Weintraub (ed.), *Toward a History of Game Theory*, pp. 207-224. Durham: Duke University Press.

ROEMER, John (1986). *Analytical Marxism*. Cambridge: Cambridge University Press.
ROWE, Nicholas (1989). *Rules and Institutions*. Ann Arbor: University of Michigan Press.
SÁNCHEZ-CUENCA, Ignacio (1998). "Institutional commitments and democracy", *Archives Europeennes de Sociologie*, 39, 1: 78-109.
— (2004). "Party moderation and politicians' ideological rigidity", *Party Politics*, 10: 328-342.
— (2007). "Cooperar por principio", *Revista Internacional de Sociología*, 46: 11-35.
— (2008). "A preference for selfish preferences: the problem of motivations in rational choice political science", *Philosophy of the Social Sciences*, 38, 3: 361-378.
SCHELLING, Thomas (1960). *The Strategy of Conflict*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
TSEBELIS, George (1989). "The abuse of probability in political analysis: The Robinson Crusoe fallacy", *American Political Science Review*, 83, 1: 77-91.
WEINGAST, Barry (1996). "Off-the-path behavior: a game-theoretic approach to counterfactuals and its implications for political and historical analysis". En P. E. Tetlock y A. Belkin (eds.), *Counterfactual Thought Experiments in World Politics*, pp. 230-243. Princeton: Princeton University Press.
WEINTRAUB, E. Roy (ed.) (1992). *Toward a History of Game Theory*. Durham: Duke University Press.

Números publicados

31. **Diarios de campo**
Juan M. García Jorba

32. **Entrevistas cualitativas**
Miguel S. Valles

33. **Introducción a las matemáticas para las ciencias sociales**
Francisca Blanco Moreno

34. **Teoría de juegos**
Ignacio Sánchez-Cuenca

35. **La encuesta: una perspectiva general metodológica**
Francisco Alvira Martín

36. **Manual de trabajo de campo en la encuesta**
Vidal Díaz de Rada

37. **«Grounded Theory»: La constitución de la teoría a través del análisis interpretacional**
Antonio Trinidad Requena, Virginia Carrero Planes y Rosa M.ª Soriano Miras

38. **Análisis de la Historia de Acontecimientos**
Fabrizio Bernardi

39. **El análisis de segmentación: técnicas y aplicaciones de los árboles de clasificación**
Modesto Escobar Mercado

40. **Evolución de la Teoría Fundamentada como técnica de análisis cualitativo**
Jaime Andréu Abela, Antonio García-Nieto y Ana Mª Pérez Corbacho

41. **Dinámica del grupo de discusión**
Jesús Gutiérrez Brito

42. **Encuesta deliberativa**
María Cuesta, Joan Font, Ernesto Ganuza, Braulio Gómez y Sara Pasadas